

5.1.2 Av formelene 1, 2, 3 (eller formel 4 med $n = 0, 1, 2$) i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi

$$\mathcal{L}(a + bt + ct^2) = a\mathcal{L}(1) + b\mathcal{L}(t) + c\mathcal{L}(t^2) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{2c}{s^3}.$$

5.1.9 For $0 \leq t \leq 1$ er grafen til $f(t)$ en rett linje med stigningstall -1 som går gjennom punktet $(1, 0)$. Den har da ligning $y - 0 = -(t - 1)$, dvs. $y = 1 - t$. Følgelig er $f(t)$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{for } t > 1, \end{cases}$$

og vi kan finne den Laplacetransformerte ved integrasjon:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{-st}(1-t) dt = -\frac{1}{s} e^{-st}(1-t) \Big|_{t=0}^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s} (-1) dt \\ &= \frac{1}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} (e^{-s} - 1) \end{aligned}$$

der vi brukte delvis integrasjon $\int u' \cdot v dt = u \cdot v - \int u \cdot v' dt$ med $u' = e^{-st}$ og $v = 1 - t$.

5.1.22 Ved å bruke formel 4 i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi, etter litt omforming,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{60 + 6s^2 + s^4}{s^7} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{60}{s^7} + \frac{6}{s^5} + \frac{1}{s^3} \right\} \\ &= 60\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^7} \right\} + 6\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^5} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} \\ &= \frac{60}{6!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6!}{s^7} \right\} + \frac{6}{4!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4!}{s^5} \right\} + \frac{1}{2!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2!}{s^3} \right\} \\ &= \frac{60}{720} t^6 + \frac{6}{4!} t^4 + \frac{1}{2!} t^2 = \frac{t^6}{12} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

5.1.32 Vi omskriver først funksjonen ved hjelp av formelen $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ med $u = \frac{1}{2}t$:

$$2e^{-t} \cos^2 \frac{1}{2}t = e^{-t}(1 + \cos t) = e^{-t} + e^{-t} \cos t.$$

Vi bruker så tabell 5.1, Kreyszig s. 254, og teorem 2, Kreyszig s. 253, (første forskyvningsregel/skifteteorem) med $f(t) = \cos t$, $F(s) = s/(s^2 + 1)$ og $a = -1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{2e^{-t} \cos^2 \frac{1}{2}t\} &= \mathcal{L}\{e^{-t} + e^{-t} f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} + \mathcal{L}\{e^{-t} f(t)\} \\ &= \frac{1}{s+1} + F(s+1) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

5.1.37 Nevneren $s^2 + 6s + 18$ har ingen reelle nullpunkter og er derfor irreducibel. Vi omskriver funksjonen ved å komplettere kvadratet i nevneren:

$$\frac{3}{s^2 + 6s + 18} = \frac{3}{(s+3)^2 + 9} = \frac{3}{(s+3)^2 + 3^2}$$

og bruker Første forskyvningsregel/skifteteorem (Teorem 2, Kreyszig s. 253) med

$$F(s+3) = \frac{3}{(s+3)^2 + 3^2}, \quad F(s) = \frac{3}{s^2 + 3^2}, \quad f(t) = \sin 3t.$$

Det gir

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+3)^2 + 3^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{F(s+3)\} \stackrel{a=-3}{=} e^{-3t} f(t) = e^{-3t} \sin 3t.$$

5.2.3 Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y' + 0,2y = 0,01t, \quad y(0) = -0,25.$$

Av regelen for å Laplacetransformere en derivert (teorem 1, Kreyszig s. 258) og tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) får vi, når vi setter $\mathcal{L}(y) = Y$:

$$sY - y(0) + 0,2Y = 0,01/s^2 \quad \text{dvs.} \quad sY + 0,25 + 0,2Y = 0,01/s^2.$$

Det gir

$$\begin{aligned} (s+0,2)Y &= -0,25 + \frac{0,01}{s^2} \\ &= \frac{-0,25s^2 + 0,01}{s^2} = -\frac{0,25(s^2 - 0,04)}{s^2} = -\frac{0,25(s-0,2)(s+0,2)}{s^2}. \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$Y = -\frac{0,25(s-0,2)}{s^2} = \frac{0,05}{s^2} - \frac{0,25}{s} \quad \text{og} \quad y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 0,05t - 0,25$$

fra tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) formel 1 og 2.

5.2.9 Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = 6e^{-2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -14$$

Av regelen for å Laplacetransformere en nte-derivert (teorem 2, Kreyszig s. 259), her med $n = 2$, og tabell 5.1 (Kreyszig s. 254), formel 6, får vi, når vi setter $\mathcal{L}(y) = Y$:

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + 2[sY - y(0)] - 3Y = 6/(s+2)$$

det vil si

$$s^2 Y - 2s + 14 + 2sY - 4 - 3Y = 6/(s+2)$$

Det gir

$$(s^2 + 2s - 3)Y = 2s - 10 + \frac{6}{s+2} = \frac{2s^2 - 6s - 14}{s+2}$$

Vi kan faktorisere $s^2 + 2s - 3 = (s+3)(s-1)$, og bruker delbrøkkopp spalting for å forenkle uttrykket for Y :

$$Y = \frac{2s^2 - 6s - 14}{(s+2)(s^2 + 2s - 3)} = \frac{2s^2 - 6s - 14}{(s+2)(s+3)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-1}$$

Vi får

$$A = -2, \quad B = \frac{11}{2}, \quad C = -\frac{3}{2} \quad \text{og} \quad \text{følgelig} \quad Y = -\frac{2}{s+2} + \frac{11/2}{s+3} - \frac{3/2}{s-1}.$$

Dermed får vi fra tabell 5.1 (Kreyszig s. 254):

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = -2e^{-2t} + \frac{11}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^t.$$

5.2.13 Siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+4)\} = e^{-4t}$ får vi ved å bruke formel (9) i Teorem 3 (Integralregelen) i Kreyszig 5.2:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+4}\right\} = \int_0^t e^{-4\tau} d\tau = -\frac{1}{4}e^{-4\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})$$

Vi kunne også brukt delbrøkkoppstilling og tabell 5.1 for å finne $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4s)\}$, men siden s er en faktor i nevneren kan vi bruke Integralregelen.