5.1.2 Av formlene 1, 2, 3 (eller formel 4 med $n = 0, 1, 2$) i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi

$$\mathcal{L}(a+bt+ct^2) = a\mathcal{L}(1) + b\mathcal{L}(t) + c\mathcal{L}(t^2) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{2c}{s^3}.$$

5.1.9 For $0 \le t \le 1$ er grafen til $f(t)$ en rett linje med stigningstall -1 som går gjennom punktet $(1,0)$. Den har da ligning $y - 0 = -(t-1)$, dvs. $y = 1-t$. Følgelig er $f(t)$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{for } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{for } t > 1, \end{cases}$$

og vi kan finne den Laplacetransformerte ved integrasjon:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}(1-t)\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}(1-t)\Big|_{t=0}^{1} + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}(-1)\,dt \\
&= \frac{1}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\left(e^{-s} - 1\right)
\end{aligned}$$

der vi brukte delvis integrasjon $\int u' \cdot v\,dt = u \cdot v - \int u \cdot v'\,dt$ med $u' = e^{-st}$ og $v = 1-t$.

5.1.22 Ved å bruke formel 4 i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi, etter litt omforming,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{60+6s^2+s^4}{s^7}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{60}{s^7} + \frac{6}{s^5} + \frac{1}{s^3}\right\} \\
&= 60\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^7}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\
&= \frac{60}{6!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6!}{s^7}\right\} + \frac{6}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} + \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} \\
&= \frac{60}{720}t^6 + \frac{6}{4!}t^4 + \frac{1}{2!}t^2 = \frac{t^6}{12} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

5.1.32 Vi omskriver først funksjonen ved hjelp av formelen $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$ med $u = \frac{1}{2}t$:

$$2e^{-t}\cos^2 \tfrac{1}{2}t = e^{-t}(1+\cos t) = e^{-t} + e^{-t}\cos t.$$

Vi bruker så tabell 5.1, Kreyszig s. 254, og teorem 2, Kreyszig s. 253, (første forskyvningsregel/skiftteorem) med $f(t) = \cos t$, $F(s) = s/(s^2+1)$ og $a = -1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{2e^{-t}\cos^2 \tfrac{1}{2}t\} &= \mathcal{L}\{e^{-t} + e^{-t}f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} + \mathcal{L}\{e^{-t}f(t)\} \\
&= \frac{1}{s+1} + F(s+1) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

5.1.37 Nevneren $s^2+6s+18$ har ingen reelle nullpunkter og er derfor irredusibel. Vi omskriver funksjonen ved å komplettere kvadratet i nevneren:

$$\frac{3}{s^2+6s+18} = \frac{3}{(s+3)^2+9} = \frac{3}{(s+3)^2+3^2}$$

og bruker Første forskyvningsregel/skiftteorem (Teorem 2, Kreyszig s. 253) med

$$F(s+3) = \frac{3}{(s+3)^2+3^2}, \quad F(s) = \frac{3}{s^2+3^2}, \quad f(t) = \sin 3t.$$

Det gir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+3)^2+3^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s+3)\} \overset{a=-3}{=} e^{-3t}f(t) = e^{-3t}\sin 3t.$$

$\boxed{5.2.3}$ Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y' + 0{,}2y = 0{,}01t\,, \qquad y(0) = -0{,}25.$$

Av regelen for å Laplacetransformere en derivert (teorem 1, Kreyszig s. 258) og tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) får vi, når vi setter $\mathcal{L}(y) = Y$:

$$sY - y(0) + 0{,}2Y = 0{,}01/s^2 \quad \text{dvs.} \quad sY + 0{,}25 + 0{,}2Y = 0{,}01/s^2.$$

Det gir

$$\begin{aligned}(s+0{,}2)Y &= -0{,}25 + \frac{0{,}01}{s^2}\\ &= \frac{-0{,}25s^2+0{,}01}{s^2} = -\frac{0{,}25(s^2-0{,}04)}{s^2} = -\frac{0{,}25(s-0{,}2)(s+0{,}2)}{s^2}.\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$Y = -\frac{0{,}25(s-0{,}2)}{s^2} = \frac{0{,}05}{s^2} - \frac{0{,}25}{s} \quad \text{og} \quad y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 0{,}05t - 0{,}25$$

fra tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) formel 1 og 2.

$\boxed{5.2.9}$ Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = 6e^{-2t}, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = -14$$

Av regelen for å Laplacetransformere en $n$te-derivert (teorem 2, Kreyszig s. 259), her med $n = 2$, og tabell 5.1 (Kreyszig s. 254), formel 6, får vi, når vi setter $\mathcal{L}(y) = Y$:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 2[sY - y(0)] - 3Y = 6/(s+2)$$

det vil si

$$s^2Y - 2s + 14 + 2sY - 4 - 3Y = 6/(s+2)$$

Det gir

$$(s^2+2s-3)Y = 2s - 10 + \frac{6}{s+2} = \frac{2s^2-6s-14}{s+2}$$

Vi kan faktorisere $s^2+2s-3 = (s+3)(s-1)$, og bruker delbrøkoppspalting for å forenkle uttrykket for Y:

$$Y = \frac{2s^2-6s-14}{(s+2)(s^2+2s-3)} = \frac{2s^2-6s-14}{(s+2)(s+3)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-1}$$

Vi får

$$A = -2, \quad B = \tfrac{11}{2}, \quad C = -\tfrac{3}{2} \qquad \text{og følgelig} \quad Y = -\frac{2}{s+2} + \frac{11/2}{s+3} - \frac{3/2}{s-1}.$$

Dermed får vi fra tabell 5.1 (Kreyszig s. 254):

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = -2e^{-2t} + \tfrac{11}{2}e^{-3t} - \tfrac{3}{2}e^{t}.$$

$\boxed{\text{5.2.13}}$ Siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+4)\} = e^{-4t}$ får vi ved å bruke formel (9) i Teorem 3 (Integralregelen) i Kreyszig 5.2:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+4}\right\} = \int_0^t e^{-4\tau}\,d\tau = -\tfrac{1}{4}e^{-4\tau}\Big|_0^t = \tfrac{1}{4}(1-e^{-4t})$$

Vi kunne også brukt delbrøkoppspalting og tabell 5.1 for å finne $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4s)\}$, men siden s er en faktor i nevneren kan vi bruke Integralregelen.