NTNU
Institutt for matematiske fag

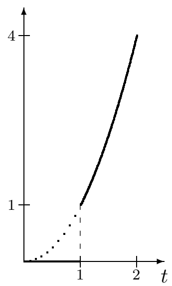
TMA4135 matematikk 4D Øving 2

Løsningsforslag øving 2 høst 2004

5.3.5

$$t^2u(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ t^2 & \text{for } t > 1 \end{cases}$$

Vi omskriver $t^2u(t-1)$ slik at den blir av formen $f(t-1)u(t-1)$. Da kan vi finne den Laplacetransformerte ved å bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. skiftteorem/forskyvningsregel, Kreyszig s. 267 teorem 1).



$$t^2 = [(t-1)+1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1$$
$$t^2u(t-1) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1]u(t-1)$$

Da har vi $t^2u(t-1) = f(t-1)u(t-1)$ der $f(t-1) = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1$ og følgelig $f(t) = t^2 + 2t + 1$. Siden $\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$ får vi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 2/s^3 + 2/s^2 + 1/s$ og dermed

$$\mathcal{L}\{t^2u(t-1)\} = \mathcal{L}\{f(t-1)u(t-1)\} = F(s)e^{-s} = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)e^{-s}.$$

Alternativt kan vi finne den Laplacetransformerte ved integrasjon:

$$\mathcal{L}\{t^2u(t-1)\} = \int_0^\infty e^{-st}t^2u(t-1)\,dt = \int_1^\infty e^{-st}t^2\,dt$$

(delvis integrasjon) $$= -\frac{1}{s}e^{-st}t^2\Big|_{t=1}^\infty + \frac{1}{s}\int_1^\infty e^{-st}2t\,dt$$

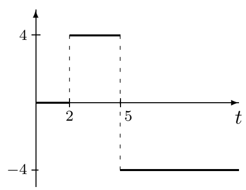
(delvis integrasjon) $$= \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}2t\Big|_{t=1}^\infty + \frac{1}{s^2}\int_1^\infty e^{-st}2\,dt$$

$$= \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{2}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s^3}e^{-st}\Big|_{t=1}^\infty = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{2}{s^3}e^{-s}$$

der vi, når vi satte inn øvre grense, brukte at $\lim_{t\to\infty} e^{-st}t^n = 0$ for $s > 0$.

5.3.14

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(e^{-2s} - 2e^{-5s})}{s}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\} - 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s}\right\}$$
$$= 4u(t-2) - 8u(t-5) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 4 & \text{for } 2 < t < 5 \\ -4 & \text{for } t > 5 \end{cases}$$



5.3.28

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t-1), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$$

Sett $Y = \mathcal{L}(y)$. Laplacetransformerer ligningen ($\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$) og får

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + 4[sY - y(0)] + 5Y = e^{-s}$$

dvs.

$$(s^2 + 4s + 5)Y = 3 + e^{-s}$$

og følgelig

$$Y = \frac{3 + e^{-s}}{s^2 + 4s + 5} = \frac{3}{(s+2)^2 + 1} + \frac{1}{(s+2)^2 + 1}e^{-s}.$$

Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right\} = e^{-2t}\sin t$$

ifølge skiftteorem 1. Ved også å bruke skiftteorem 2 får vi

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 3e^{-2t}\sin t + e^{-2(t-1)}\sin(t-1)u(t-1)$$
$$= \begin{cases} 3e^{-2t}\sin t & \text{for } 0 < t < 1 \\ e^{-2t}\left[3\sin t + e^2\sin(t-1)\right] & \text{for } t > 1. \end{cases}$$

5.4.3 Vi skal finne $\mathcal{L}(t^2\cosh\pi t)$ ved hjelp av formelen (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275. Siden $\mathcal{L}(\cosh\pi t) = s/(s^2 - \pi^2)$ får vi, ved å bruke formel (1) 2 ganger,

$$\mathcal{L}(t\cosh\pi t) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2 - \pi^2} = -\frac{(s^2 - \pi^2)\cdot 1 - 2s\cdot s}{(s^2 - \pi^2)^2} = \frac{s^2 + \pi^2}{(s^2 - \pi^2)^2}$$
$$\mathcal{L}(t^2\cosh\pi t) = \mathcal{L}\{t(t\cosh\pi t)\} = -\frac{d}{ds}\frac{s^2 + \pi^2}{(s^2 - \pi^2)^2}$$
$$= -\frac{(s^2 - \pi^2)^2\cdot 2s - 2(s^2 - \pi^2)2s\cdot(s^2 + \pi^2)}{(s^2 - \pi^2)^4} = \frac{2s^3 + 6\pi^2 s}{(s^2 - \pi^2)^3}.$$

5.4.13 Vi skal finne invers Laplacetransformert $f(t)$ for $F(s) = \ln\left[(s^2+1)/(s-1)^2\right]$ ved å bruke formel (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275 (eller formel (6), Kreyszig s. 276).

Vi får

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\ln\frac{s^2 + 1}{(s-1)^2} = \frac{d}{ds}\left[\ln(s^2+1) - 2\ln(s-1)\right] = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s-1}$$
$$-tf(t) \overset{(1)}{=} \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}\right\} = 2\left(\cos t - e^t\right)$$
$$f(t) = -\frac{2}{t}\left(\cos t - e^t\right) = \frac{2}{t}\left(e^t - \cos t\right).$$

5.5.7 Vi skal regne ut konvolusjonsproduktet $(f * g)(t)$ med $f(t) = t$ og $g(t) = e^t$.

$$t * e^t = \int_0^t f(v)g(t-v)\,dv = \int_0^t ve^{t-v}\,dv$$

(delvis integrasjon) $$= \Big[v(-e^{t-v})\Big]_{v=0}^t + \int_0^t e^{t-v}\,dv$$

$$= -t + \Big[-e^{t-v}\Big]_{v=0}^t = e^t - t - 1$$

5.5.15 Vi skal finne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2 + \pi^2)^2\}$ ved å bruke konvolusjon. Vi merker oss først at

$$\frac{s}{(s^2 + \pi^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{s^2 + \pi^2}\cdot\frac{s}{s^2 + \pi^2}$$

og vet at $\mathcal{L}^{-1}\{\pi/(s^2+\pi^2)\} = \sin\pi t$ og $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+\pi^2)\} = \cos\pi t$ (Tabell 5.1, Kreyszig s. 254). Følgelig får vi, ved konvolusjonsregelen (Teorem 1, Kreyszig s. 279),

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\cdot\frac{s}{s^2+\pi^2}\Big\} = \frac{1}{\pi}\sin\pi t * \cos\pi t = \frac{1}{\pi}\int_0^t \sin\pi v\,\cos\pi(t-v)\,dv.$$

For å regne ut integralet kan vi bruke den trigonometriske identiteten

(jf. Rottmann s. 88) $\qquad \sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$

med $A=\pi v$, $B=\pi(t-v)$ og følgelig $A+B=\pi t$, $A-B=\pi(2v-t)$. Det gir

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^t \sin\pi v\cos\pi(t-v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_0^t [\sin\pi t+\sin\pi(2v-t)]\,dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[v\sin\pi t - \frac{1}{2\pi}\cos\pi(2v-t)\Big]_{v=0}^t \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[\Big(t\sin\pi t-\frac{1}{2\pi}\cos\pi t\Big)-\Big(-\frac{1}{2\pi}\cos(-\pi t)\Big)\Big] = \frac{t}{2\pi}\sin\pi t \end{aligned}$$

der vi i siste linje forenklet svaret ved å bruke $\cos(-\pi t) = \cos\pi t$.

5.5.31 Laplacetransformasjonen skal brukes til å løse integralligningen

$$y(t) = te^t - 2e^t\int_0^t e^{-\tau}y(\tau)\,d\tau.$$

Merk at $e^t\int_0^t e^{-\tau}y(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\,d\tau = e^t * y(t)$ slik at ligningen kan skrives

$$y(t) = te^t - 2e^t * y(t).$$

Laplacetransformerer ved å bruke $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ og konvolusjonsregelen:

$$Y = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^t) - 2\mathcal{L}(e^t)\cdot Y = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1} - 2\frac{1}{s-1}\cdot Y = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1}\cdot Y$$

Det gir

$$\Big(1+\frac{2}{s-1}\Big)Y = \frac{1}{(s-1)^2} \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{s+1}{s-1}Y = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Dermed blir

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s^2-1} \qquad \text{og følgelig} \qquad y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \sinh t.$$