

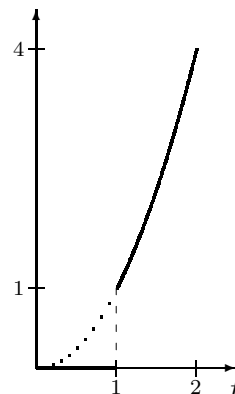
5.3.5

$$t^2 u(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ t^2 & \text{for } t > 1 \end{cases}$$

Vi omskriver $t^2 u(t-1)$ slik at den blir av formen $f(t-1)u(t-1)$. Da kan vi finne den Laplace-transformerte ved å bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. skiftteorem/forskyvningsregel, Kreyszig s. 267 teorem 1).

$$t^2 = [(t-1) + 1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1$$

$$t^2 u(t-1) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1]u(t-1)$$



Da har vi $t^2 u(t-1) = f(t-1)u(t-1)$ der $f(t-1) = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1$ og følgelig $f(t) = t^2 + 2t + 1$. Siden $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ får vi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 2/s^3 + 2/s^2 + 1/s$ og dermed

$$\mathcal{L}\{t^2 u(t-1)\} = \mathcal{L}\{f(t-1)u(t-1)\} = F(s)e^{-s} = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)e^{-s}.$$

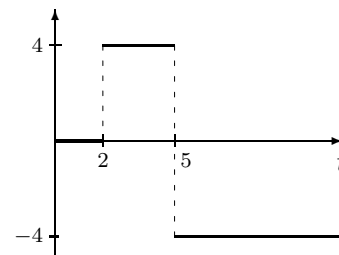
Alternativt kan vi finne den Laplacetransformerte ved integrasjon:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^2 u(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^2 u(t-1) dt = \int_1^\infty e^{-st} t^2 dt \\ (\text{delvis integrasjon}) &= -\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \Big|_{t=1}^\infty + \frac{1}{s} \int_1^\infty e^{-st} 2t dt \\ (\text{delvis integrasjon}) &= \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-st} 2t \Big|_{t=1}^\infty + \frac{1}{s^2} \int_1^\infty e^{-st} 2 dt \\ &= \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{2}{s^2} e^{-s} - \frac{2}{s^3} e^{-st} \Big|_{t=1}^\infty = \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{2}{s^2} e^{-s} + \frac{2}{s^3} e^{-s} \end{aligned}$$

der vi, når vi satte inn øvre grense, brukte at $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} t^n = 0$ for $s > 0$.

5.3.14

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(e^{-2s} - 2e^{-5s})}{s}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\} - 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s}\right\} \\ &= 4u(t-2) - 8u(t-5) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 4 & \text{for } 2 < t < 5 \\ -4 & \text{for } t > 5 \end{cases} \end{aligned}$$



5.3.28

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

Sett $Y = \mathcal{L}(y)$. Laplacetransformerer ligningen ($\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$) og får

$$[s^2 Y - sy(0) - y'(0)] + 4[sY - y(0)] + 5Y = e^{-s}$$

dvs.

$$(s^2 + 4s + 5)Y = 3 + e^{-s}$$

og følgelig

$$Y = \frac{3 + e^{-s}}{s^2 + 4s + 5} = \frac{3}{(s+2)^2 + 1} + \frac{1}{(s+2)^2 + 1} e^{-s}.$$

Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right\} = e^{-2t} \sin t$$

ifølge skiftteorem 1. Ved også å bruke skiftteorem 2 får vi

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = 3e^{-2t} \sin t + e^{-2(t-1)} \sin(t-1)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 3e^{-2t} \sin t & \text{for } 0 < t < 1 \\ e^{-2t} [3 \sin t + e^2 \sin(t-1)] & \text{for } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

5.4.3 Vi skal finne $\mathcal{L}(t^2 \cosh \pi t)$ ved hjelp av formelen (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275.

Siden $\mathcal{L}(\cosh \pi t) = s/(s^2 - \pi^2)$ får vi, ved å bruke formel (1) 2 ganger,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \cosh \pi t) &= -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 - \pi^2} = -\frac{(s^2 - \pi^2) \cdot 1 - 2s \cdot s}{(s^2 - \pi^2)^2} = \frac{s^2 + \pi^2}{(s^2 - \pi^2)^2} \\ \mathcal{L}(t^2 \cosh \pi t) &= \mathcal{L}\{t(t \cosh \pi t)\} = -\frac{d}{ds} \frac{s^2 + \pi^2}{(s^2 - \pi^2)^2} \\ &= -\frac{(s^2 - \pi^2)^2 \cdot 2s - 2(s^2 - \pi^2)2s \cdot (s^2 + \pi^2)}{(s^2 - \pi^2)^4} = \frac{2s^3 + 6\pi^2 s}{(s^2 - \pi^2)^3}. \end{aligned}$$

5.4.13 Vi skal finne invers Laplacetransformert $f(t)$ for $F(s) = \ln[(s^2 + 1)/(s - 1)^2]$ ved å bruke formel (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275 (eller formel (6), Kreyszig s. 276).

Vi får

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds} \ln \frac{s^2 + 1}{(s - 1)^2} = \frac{d}{ds} [\ln(s^2 + 1) - 2 \ln(s - 1)] = \frac{2s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s - 1} \\ -tf(t) &\stackrel{(1)}{=} \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s - 1}\right\} = 2(\cos t - e^t) \\ f(t) &= -\frac{2}{t}(\cos t - e^t) = \frac{2}{t}(e^t - \cos t). \end{aligned}$$

5.5.7 Vi skal regne ut konvolusjonsproduktet $(f * g)(t)$ med $f(t) = t$ og $g(t) = e^t$.

$$\begin{aligned} t * e^t &= \int_0^t f(v)g(t-v) dv = \int_0^t v e^{t-v} dv \\ (\text{delvis integrasjon}) &= \left[v(-e^{t-v}) \right]_{v=0}^t + \int_0^t e^{t-v} dv \\ &= -t + \left[-e^{t-v} \right]_{v=0}^t = e^t - t - 1 \end{aligned}$$

5.5.15 Vi skal finne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2 + \pi^2)^2\}$ ved å bruke konvolusjon. Vi merker oss først at

$$\frac{s}{(s^2 + \pi^2)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \pi^2}$$

og vet at $\mathcal{L}^{-1}\{\pi/(s^2 + \pi^2)\} = \sin \pi t$ og $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2 + \pi^2)\} = \cos \pi t$ (Tabell 5.1, Kreyszig s. 254). Følgelig får vi, ved konvolusjonsregelen (Teorem 1, Kreyszig s. 279),

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \pi^2}\right\} = \frac{1}{\pi} \sin \pi t * \cos \pi t = \frac{1}{\pi} \int_0^t \sin \pi v \cos \pi(t - v) dv.$$

For å regne ut integralet kan vi bruke den trigonometriske identiteten

$$(jf. Rottmann s. 88) \quad \sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

med $A = \pi v$, $B = \pi(t - v)$ og følgelig $A + B = \pi t$, $A - B = \pi(2v - t)$. Det gir

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \sin \pi v \cos \pi(t - v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^t [\sin \pi t + \sin \pi(2v - t)] dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[v \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \cos \pi(2v - t) \right]_{v=0}^t \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(t \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \cos \pi t \right) - \left(-\frac{1}{2\pi} \cos(-\pi t) \right) \right] = \frac{t}{2\pi} \sin \pi t \end{aligned}$$

der vi i siste linje forenklet svaret ved å bruke $\cos(-\pi t) = \cos \pi t$.

5.5.31 Laplacetransformasjonen skal brukes til å løse integralligningen

$$y(t) = te^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau.$$

Merk at $e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau = \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = e^t * y(t)$ slik at ligningen kan skrives

$$y(t) = te^t - 2e^t * y(t).$$

Laplacetransformerer ved å bruke $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ og konvolusjonsregelen:

$$Y = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(e^t) - 2\mathcal{L}(e^t) \cdot Y = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-1} - 2 \frac{1}{s-1} \cdot Y = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1} \cdot Y$$

Det gir

$$\left(1 + \frac{2}{s-1}\right) Y = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \text{dvs.} \quad \frac{s+1}{s-1} Y = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Dermed blir

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s^2-1} \quad \text{og følgelig} \quad y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \sinh t.$$