NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4135 matematikk 4D Øving 3

Løsningsforslag øving 3 høst 2004

5.6.2 Vi søker $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ for $F(s) = (s^3 + 2s^2 + 2)/[s^3(s^2 + 1)]$ og delbrøkoppspalter

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2 + 1)} = \frac{A_3}{s^3} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}.$$

For å bestemme A_1, A_2, A_3, B og C, multipliserer vi med fellesnevneren $s^3(s^2 + 1)$ og sammenligner koeffisientene til s^n på begge sider av likhetstegnet.

$$s^3 + 2s^2 + 2 = A_3(s^2 + 1) + A_2 s(s^2 + 1) + A_1 s^2(s^2 + 1) + (Bs + C)s^3$$

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} \quad [s^4]: & 0 = A_1 + B & & A_3 = 2 \quad \text{fra (e)} \\
\text{(b)} \quad [s^3]: & 1 = A_2 + C & & A_2 = 0 \quad \text{fra (d)} \\
\text{(c)} \quad [s^2]: & 2 = A_3 + A_1 & \text{som gir} & A_1 = 2 - A_3 = 0 \quad \text{fra (c)} \\
\text{(d)} \quad [s^1]: & 0 = A_2 & & C = 1 - A_2 = 1 \quad \text{fra (b)} \\
\text{(e)} \quad [s^0]: & 2 = A_3 & & B = -A_1 = 0 \quad \text{fra (a)}
\end{array}$$

Dermed blir

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{og følgelig} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = t^2 + \sin t.$$

Vi kunne ha gjort delbrøkoppspaltingen direkte her, uten å løse ligningssystem,

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2 + 1)} = \frac{s^3 + 2(s^2 + 1)}{s^3(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^3}.$$

5.6.3 Vi søker $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ for $F(s) = (s^2 + 9s - 9)/(s^3 - 9s)$ og delbrøkoppspalter

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s - 9}{s^3 - 9s} = \frac{s^2 + 9s - 9}{s(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3}.$$

For å bestemme A, B, C, multipliserer vi med fellesnevneren $s(s-3)(s+3)$. Det gir

$$s^2 + 9s - 9 = A(s-3)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s-3).$$

Så setter vi inn $s = 0$, $s = 3$, $s = -3$, og får

$$-9 = A \cdot (-9),\ A = 1; \qquad 27 = B \cdot 18,\ B = 3/2; \qquad -27 = C \cdot 18,\ C = -3/2.$$

Dermed blir

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3/2}{s-3} - \frac{3/2}{s+3} \quad \text{og følgelig} \quad f(t) = 1 + \tfrac{3}{2}e^{3t} - \tfrac{3}{2}e^{-3t} = 1 + 3\sinh 3t.$$

5.7.11 Vi skal løyse initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + 1 - u(t-1), \quad y_1(0) = 0 \\ y_2' &= y_1 + 1 - u(t-1), \quad y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Vi set $Y_1 = \mathcal{L}\{y_1\}$, $Y_2 = \mathcal{L}\{y_2\}$. Ved å bruke formelen $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{1}{s}e^{-as}$ og derivasjonsregelen $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ får vi

$$\begin{aligned} sY_1 + Y_2 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}, \\ -Y_1 + sY_2 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}. \end{aligned}$$

Eliminasjon av Y_1 ($Y_1 = sY_2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s}$ frå andre likning innsett i første likning) gir

$$Y_2 = \frac{1}{s(1+s^2)} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s(1+s^2)}e^{-s} - \frac{e^{-s}}{1+s^2}.$$

Vi har $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\} = \sin t$. Av regelen $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ får vi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+s^2}\right\} = \int_0^t \sin\tau\,d\tau = 1 - \cos t.$$

(Her kunne vi også bruke delbrøkspalting eller konvolusjonsregelen.) Ved også å bruke forskyvningsregelen $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$ får vi då

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 - \cos t + \sin t - u(t-1)\,[1 - \cos(t-1)] - u(t-1)\sin(t-1) \\ &= 1 - \cos t + \sin t + u(t-1)[-1 + \cos(t-1) - \sin(t-1)]. \end{aligned}$$

Innsetjing av uttrykket for Y_2 i formelen $Y_1 = sY_2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s}$ gir

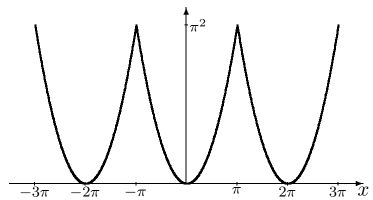
$$Y_1 = -\frac{1}{s} + \frac{1}{1+s^2} + \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{1+s^2}e^{-s} - \frac{s}{1+s^2}e^{-s}$$

og dermed som ovanfor

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 + \sin t + \cos t + u(t-1) - u(t-1)\sin(t-1) - u(t-1)\cos(t-1) \\ &= -1 + \sin t + \cos t + u(t-1)\,[1 - \sin(t-1) - \cos(t-1)]\,. \end{aligned}$$

10.1.8

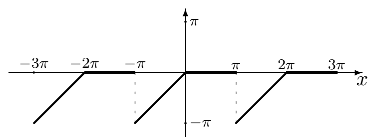
$f(x) = x^2$ for $-\pi < x < \pi$
$f(x + 2\pi) = f(x)$ for alle x
Grafen er tegnet for $-3\pi \le x \le 3\pi$



10.1.13

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } -\pi \le x \le 0 \\ 0 & \text{for } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

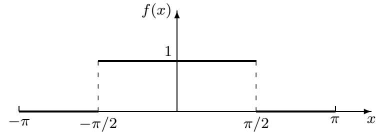
$f(x + 2\pi) = f(x)$ for alle x
Grafen er tegnet for $-3\pi \le x \le 3\pi$



10.2.1 Vi søker Fourierrekka for den 2π-periodiske funksjonen $f(x)$ gitt på figuren.

På intervallet $-\pi < x < \pi$ er $f(x)$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi < x < -\pi/2 \\ 1 & \text{for } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{for } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$



Eulerformlene for Fourierkoeffisientene, Kreyszig s.531/Rottman s.175 ($L = \pi$), gir

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{1}{2},$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\sin n\pi/2}{n\pi}.$$

Følgelig er $a_n = 0$ når n er partall, og

$$a_n = 2/n\pi \quad \text{når } n = 1, 5, 9, \ldots, \qquad a_n = -2/n\pi \quad \text{når } n = 3, 7, 11, \ldots.$$

For b_n-koeefisientene får vi

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n\pi}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

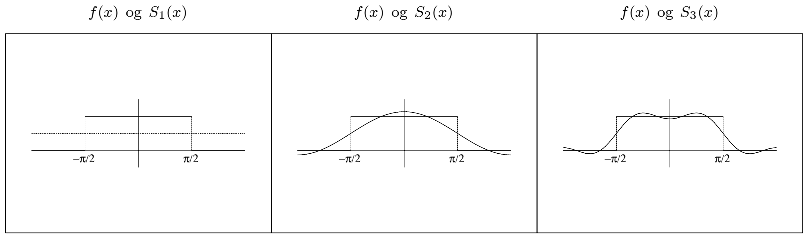
siden $\cos u - \cos(-u) = 0$, og dermed har $f(x)$ Fourierrekke

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots\Big).$$

Grafen til $f(x)$ og de tre første partialsummene

$$S_1(x) = \frac{1}{2}, \qquad S_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x, \qquad S_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x\Big)$$

i Fourierrekka til $f(x)$ er tegnet over intervallet $-\pi \le x \le \pi$:



$\boxed{10.2.17}$ Vi skal verifisere at for $x = x_0$ er summen av Fourierrekka i Kreyszig 10.2 oppg. 1 lik

$$\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \qquad \text{hvis } f(x) \text{ er diskontinuerlig for } x = x_0.$$

(Her er $f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$ og $f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$.) Av grafen til $f(x)$ i oppgave 1 ser vi at i intervallet $-\pi \le x \le \pi$ er $f(x)$ diskontinuerlig for $x = \pm\pi/2$. Vi ser også at

$$\frac{f(\pi/2+0) + f(\pi/2-0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{f(-\pi/2+0) + f(-\pi/2-0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Setter vi inn $x = \pm\pi/2$ i Fourierrekka i oppgave 1, får vi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(\cos\Big(\pm\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{3}\cos\Big(\pm\frac{3\pi}{2}\Big) + \frac{1}{5}\cos\Big(\pm\frac{5\pi}{2}\Big) - + \cdots\Big) = \frac{1}{2}$$

siden alle cosinusleddene blir null. Dermed er påstanden verifisert.