NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4135 matematikk 4D Øving 4

Løsningsforslag øving 4 høst 2004

10.3.09 Vi søker Fourierrekka for den periodiske funksjonen $f(x)$ gitt ved

$$f(x) = 0 \quad \text{for } -1 < x < 0, \qquad f(x) = x \quad \text{for } 0 < x < 1, \qquad \text{periode } p = 2L = 2.$$

Eulerformlene for Fourierkoeffisientene, Kreyszig s.537/Rottman s.175, med $L = 1$ gir

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{4}$$
$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = \frac{x\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Bigg|_0^1 = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}$$
$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_0^1 x\sin n\pi x\,dx = -\frac{x\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Bigg|_0^1 = \frac{-\cos n\pi}{n\pi}$$

ved delvis integrasjon både i a_n- og b_n-integralet. Følgelig er

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ partall} \\ -2/n^2\pi^2 & \text{for } n \text{ odde,} \end{cases} \qquad b_n = \frac{-(-1)^n}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

og $f(x)$ har Fourierrekke

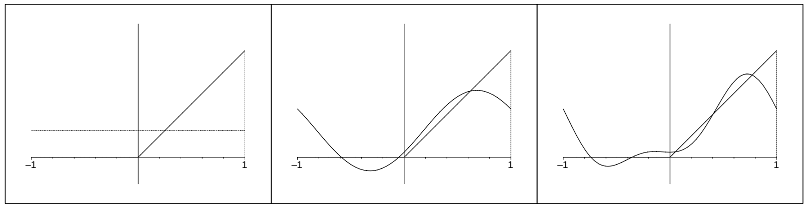
$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\Big(\cos\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots\Big) + \frac{1}{\pi}\Big(\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + - \cdots\Big).$$

Grafen til $f(x)$ og de tre første partialsummene

$$S_0(x) = \frac{1}{4}, \qquad S_1(x) = \frac{1}{4} + \Big(-\frac{2}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big)$$
$$S_2(x) = \frac{1}{4} + \Big(-\frac{2}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big) + \Big(-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\Big)$$

er tegnet for $-1 < x < 1$:

$f(x)$ og $S_0(x)$ $\qquad$ $f(x)$ og $S_1(x)$ $\qquad$ $f(x)$ og $S_2(x)$



10.4.02 Jamne funksjonar: $|x|$, e^{x^2}, $\sin^2 x$, $x\sin x$, $e^{-|x|}$.
Odde: $x\cos x$.
(Metode: Sjekk om $f(-x) = f(x)$ (jamn) eller $f(-x) = -f(x)$ (odde).)

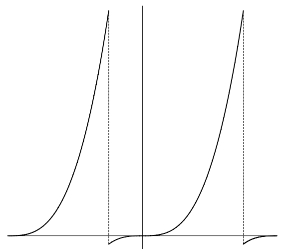
10.4.09 Vi skal avgjøre om funksjonen $f(x)$ gitt ved

$$f(x) = x^3 \quad \text{for } -\pi/2 < x < 3\pi/2, \qquad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{for alle } x$$

er en jevn (like) funksjon, $f(-x) = f(x)$ for alle x (grafen symmetrisk om y-aksen), en odde (ulike) funksjon, $f(-x) = -f(x)$ for alle x (grafen symmetrisk om origo), eller ingen av delene.

Riktignok er $y = x^3$ en odde funksjon, men her er $f(x) = x^3$ bare på intervallet $-\pi/2 < x < 3\pi/2$, og dette intervallet er ikke symmetrisk om 0.

Tegner vi grafen til $f(x)$ på intervallet $-2\pi < x < 2\pi$ ser vi at grafen verken er symmetrisk om y-aksen eller om origo, dvs. $f(x)$ er verken jevn eller odde.



10.4.15 Vi skal finne Fourierrekka til den 2π-periodiske funksjonen $f(x) = x^2/2$, $-\pi < x < \pi$.
Siden $f(x)$ er en like funksjon, blir dette ei Fouriercosinusrekke der Fourierkoeffisientene er gitt ved $(L = \pi)$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

(Rottm. s.144 formel 124)

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\cos nx\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2 - n^2x^2}{n^3}\sin nx\right]_0^\pi = \frac{2\cos n\pi}{n^2} = 2\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

La for enkelthets skyld $f((2k+1)\pi) = \pi^2/2$, $k \in \mathbf{Z}$. Da er $f(x)$ kontinuerlig overalt, og $f(x)$ har venstre- og høyresidige deriverte i punktene $x = (2k+1)\pi$ (de eneste punktene der f' er diskontinuerlig). Dermed gir teorem 1, s. 535 i Kreyszig (8. utgave) at

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

for alle $x \in \mathbf{R}$.

10.4.18 Vi skal vise at $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Fra oppg. 15 har vi

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

for alle $x \in \mathbf{R}$. Siden $f(\pi) = \pi^2/2$, får vi spesielt at

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

og da er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2/2 - \pi^2/6}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\boxed{10.4.23}$ Vi skal finne cosinusrekka og sinusrekka for funksjonen $f(x) = \pi - x$, $0 < x < L = \pi$. Av formlene i Kreyszig s. 542 / Rottman s. 175 (med $L = \pi$) får vi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{2}(\pi - x)^2\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{og, ved delvis integrasjon,}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n}\,dx\right] = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi}.$$

Når n er partall er $\cos n\pi = 1$ og følgelig $a_n = 0$. Når n er oddetall er $\cos n\pi = -1$ og følgelig $a_n = 4/(n^2\pi)$. Dermed har $f(x)$ cosinusrekke

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\Big) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

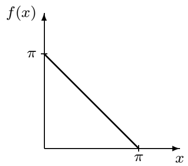
For koeffisientene i sinusrekka får vi, igjen ved delvis integrasjon,

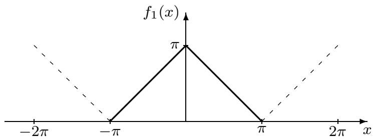
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx}_{0}\right] = \frac{2}{n}.$$

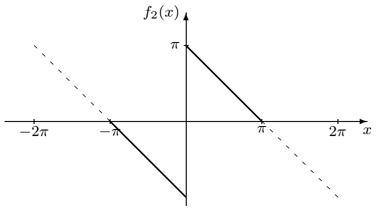
Dermed har $f(x)$ sinusrekke

$$f(x) = 2\Big(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\Big) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Grafen til $f(x)$ er tegnet på figuren til høyre. Nedenfor er grafen til $f_1(x)$ og $f_2(x)$, den jevne hhv. odde 2π-periodiske utvidelsen av $f(x)$ tegnet for $-2\pi \le x \le 2\pi$. Den jevne hhv. odde utvidelsen av $f(x)$ til $-\pi \le x \le \pi$ er heltrukket, og den periodiske utvidelsen til $-2\pi \le x \le 2\pi$ er stiplet.







$\boxed{\text{Eksamen SIF5013 vår 99 oppgave 2}}$ **a)** Ligningen er $f + e^{-t} * f = t$, og følgelig blir $F + \mathcal{L}(e^{-t}) \cdot F = \mathcal{L}(t)$, altså er

$F(s) + \frac{1}{s+1}F(s) = \frac{1}{s^2}$, og vi finner ved delbrøksoppspalting at

$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)s^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$. Invers Laplacetransformasjon gir

$$f(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t.$$

b) Funksjonen kan skrives på formen $f(t) = \sin t - u(t - 2\pi)\sin(t - 2\pi)$.
Første skifteteorem gir oss Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s} = \frac{1}{1+s^2}\left(1 - e^{-2\pi s}\right)$$

(Kan også løses direkte: $F(s) = \int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t dt = \left[\frac{e^{-st}(-s\sin t - \cos t)}{s^2+1}\right]_0^{2\pi}$)

c) Vi Laplacetransformerer ligningen og får:

$$sY - 1 + 2Y = \frac{1}{s^2+1}(1 - e^{-2\pi s}).$$

Dette gir oss

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)(s^2+1)}\left(1 - e^{-2\pi s}\right).$$

Delbrøkoppspaltning gir:

$$\frac{1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}\right).$$

Dette gir

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}\right)e^{-2\pi s}$$

$$y(t) = e^{-2t} + \frac{1}{5}\left(e^{-2t} - \cos t + 2\sin t\right) - \frac{1}{5}\left(e^{-2(t-2\pi)} - \cos(t - 2\pi) + 2\sin(t - 2\pi)\right)u(t - 2\pi)$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t & \text{for} \quad 0 \le t \le 2\pi \\ \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-2(t-2\pi)} & \text{for} \quad 2\pi \le t \end{cases}$$