TMA4135 matematikk 4D Øving 5

Løsningsforslag øving 5 høst 2004

10.5.05 Vi skal finne den komplekse Fourierrekka til $f(x) = x,\ 0 < x < 2\pi$.

Siden $f(x)$ er 2π-periodisk spiller det ingen rolle om integrasjonsintervallet forskyves. Formel (8) på side 548 i Kreyszig (8. utgave) gir dermed

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} xe^{-inx}\,dx.$$

Vi må skille mellom $n = 0$ og $n \neq 0$ og får (ved delvis integrasjon når $n \neq 0$):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi, \qquad (n = 0)\\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{in}e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{in}\,dx\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2\pi}{in}e^{-2\pi ni} - \frac{e^{-2\pi ni}-1}{(in)^2}\right] = \frac{i}{n} \qquad (n \neq 0) \end{aligned}$$

siden $1/i = -i$ og $e^{-2\pi ni} = \cos 2\pi n - i \sin 2\pi n = 1$. Ergo har $f(x)$ kompleks Fourierrekke

$$f(x) = \pi + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i}{n}e^{inx} = \pi + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{i}{n}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx}.$$

10.5.08 Fra den komplekse Fourierrekka (i oppgave 5) kan vi finne den vanlige (reelle) Fourierrekka for funksjonen $f(x) = x$, $0 < x < 2\pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{i}{n}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx} = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{-n}e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx}\\ &= \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}\cdot 2i\sin nx = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

10.7.07 Funksjonen $f(x)$ er odde så Fourierrekka blir ei sinusrekke.

Ved å bruke formel 121 i Rottmann s. 144 (eller delvis integrasjon) finn vi

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} b_{2m-1} &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin(m-\frac{1}{2})\pi}{(2m-1)^2} = \frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)^2} \qquad (m = 1,2,3,\dots)\\ b_{2m} &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos m\pi}{4m}\right] = \frac{(-1)^{m+1}}{2m} \qquad (m = 1,2,3,\dots). \end{aligned}$$

Rekkeutviklinga blir derfor (merk at $(-1)^{m-1} = (-1)^{m+1}$):

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[\frac{2}{\pi(2m-1)^2}\sin(2m-1)x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]\\ &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x + \cdots. \end{aligned}$$

Vi har altså

$$b_1 = \frac{2}{\pi},\quad b_2 = \frac{1}{2},\quad b_3 = -\frac{2}{9\pi},\quad b_4 = -\frac{1}{4},\quad b_5 = \frac{2}{25\pi}.$$

Kvadratfeilen får sitt minimum E_N^* for Fourierpolynomet $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$. Altså

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x\\ F_2(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\\ F_3(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x\\ F_4(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x\\ F_5(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x. \end{aligned}$$

Etter formel (6) i Kreyszig 10.7 har vi

$$E_N^* = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \pi\sum_{n=1}^{N} b_n^2.$$

Her er $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,dx = \pi^3/12$, og vi legg merke til at $E_{N+1}^* = E_N^* - \pi b_{N+1}^2$. Vi får

$$E_1^* = \pi^3/12 - \pi b_1^2 \approx 1.311, \qquad E_2^* = E_1^* - \pi b_2^2 \approx 0.525, \qquad E_3^* = E_2^* - \pi b_3^2 \approx 0.509$$
$$E_4^* = E_3^* - \pi b_4^2 \approx 0.313, \qquad E_5^* = E_4^* - \pi b_5^2 \approx 0.311.$$

10.8.15 Gitt $f(x) = \sin x$ for $0 < x < \pi$, 0 for $x > \pi$. Vi skal finne Fouriersinusintegralet til $f(x)$. Fra (12) Kreyszig s. 562 får vi, når vi bruker den trigonometriske formelen $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ (Rottmann s. 88),

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin wx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin wx\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1-w)x - \cos(1+w)x]\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-w)x}{1-w} - \frac{\sin(1+w)x}{1+w}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-w)\pi}{1-w} - \frac{\sin(1+w)\pi}{1+w}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\pi w}{1-w} + \frac{\sin\pi w}{1+w}\right] = \frac{2\sin\pi w}{\pi(1-w^2)} \end{aligned}$$

idet $\sin(1-w)\pi = \sin(\pi - \pi w) = \sin\pi w$ og $\sin(1+w)\pi = \sin(\pi w + \pi) = -\sin\pi w$.

Dermed blir Fouriersinusintegralet ((13) Kreyszig s. 562)

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi w}{1-w^2}\sin wx\,dw$$

dvs.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi w}{1-w^2}\sin wx\,dw = \begin{cases}\pi(\sin x)/2 & \text{for } 0 \le x \le \pi\\ 0 & \text{for } x > \pi.\end{cases}$$

10.10.09 Vi har fordi f er en odde funksjon.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos xw - i\sin xw)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\sin xw)dx =$$
$$-2i\int_0^{\infty} f(x)\sin xwdx = -2i\int_0^a \sin xwdx = 2i\left(\frac{1-\cos aw}{w}\right)$$

Altså er

$$\mathcal{F}(f)(w) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos aw}{w}$$

Merk at nær 0 har vi $\cos aw = 1 - \frac{(aw)^2}{2} + \frac{(aw)^4}{24} - \cdots$, så nær 0 oppfører $\mathcal{F}(f)(w)$ som $\frac{ia^2w}{\sqrt{2\pi}}$.

D-19/75020 aug 93 /oppgave 5

Bestem funksjonene $A(w)$ og $B(w)$ i Fourierintegralet for $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ e^{-x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$

Ved f.eks. bruk av formlene 132 og 133 i Rottmann side 144, eller ved to gangers delvis integrasjon finner vi

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos wx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}}{1+w^2}(-\cos wx + w\sin wx)\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+w^2}\,, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin wx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}}{1+w^2}(-\sin wx - w\cos wx)\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\frac{w}{1+w^2}\,. \end{aligned}$$

Funksjonen $f(x)$ oppfyller forutsetningene i teoremet om Fourierintegral (Kreyszig 10.8 Teorem 1). Altså er

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw + \int_0^{\infty}\frac{w\sin wx}{1+w^2}\,dw\right\} = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 0, \\ e^{-x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Hvis vi setter inn $x = 1$ og $x = -1$ i Fourierintegralet, finner vi at

(1) $$\int_0^{\infty}\frac{\cos w}{1+w^2}\,dw + \int_0^{\infty}\frac{w\sin w}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{e}$$

og

(2) $$\int_0^{\infty}\frac{\cos w}{1+w^2}\,dw - \int_0^{\infty}\frac{w\sin w}{1+w^2}\,dw = 0.$$

Addisjon av ligningene (1) og (2) og divisjon med 2 gir

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos w}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2e}\,, \qquad \text{og av (1) får vi} \qquad \int_0^{\infty}\frac{w\sin w}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2e}\,.$$