

**10.5.05** Vi skal finne den komplekse Fourierrekke til  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 2\pi$ .

Siden  $f(x)$  er  $2\pi$ -periodisk spiller det ingen rolle om integrasjonsintervallet forskyves. Formel (8) på side 548 i Kreyszig (8. utgave) gir dermed

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} xe^{-inx} dx.$$

Vi må skille mellom  $n = 0$  og  $n \neq 0$  og får (ved delvis integrasjon når  $n \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi, \quad (n = 0) \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} xe^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{x}{in} e^{-inx} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-inx}}{in} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{2\pi}{in} e^{-2\pi ni} - \frac{e^{-2\pi ni} - 1}{(in)^2} \right] = \frac{i}{n} \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

siden  $1/i = -i$  og  $e^{-2\pi ni} = \cos 2\pi n - i \sin 2\pi n = 1$ . Ergo har  $f(x)$  kompleks Fourierrekke

$$f(x) = \pi + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx} = \pi + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{i}{n} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx}.$$

**10.5.08** Fra den komplekse Fourierrekke (i oppgave 5) kan vi finne den vanlige (reelle) Fourierrekke for funksjonen  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 2\pi$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{i}{n} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx} = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{-n} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx} \\ &= \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} (e^{inx} - e^{-inx}) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} \cdot 2i \sin nx = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin nx}{n}. \end{aligned}$$

**10.7.07** Funksjonen  $f(x)$  er odde så Fourierrekke blir ei sinusrekke.

Ved å bruke formel 121 i Rottmann s. 144 (eller delvis integrasjon) finn vi

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} b_{2m-1} &= \frac{2 \sin(m - \frac{1}{2})\pi}{\pi (2m - 1)^2} = \frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m - 1)^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{2m} &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi \cos m\pi}{4m} \right] = \frac{(-1)^{m+1}}{2m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Rekkeutviklinga blir derfor (merk at  $(-1)^{m-1} = (-1)^{m+1}$ ):

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[ \frac{2}{\pi(2m-1)^2} \sin(2m-1)x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x + \dots \end{aligned}$$

Vi har altså

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = -\frac{2}{9\pi}, \quad b_4 = -\frac{1}{4}, \quad b_5 = \frac{2}{25\pi}.$$

Kvadratfeilen får sitt minimum  $E_N^*$  for Fourierpolynomet  $F_N(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nx$ . Altså

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{2}{\pi} \sin x \\ F_2(x) &= \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x \\ F_3(x) &= \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x \\ F_4(x) &= \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x \\ F_5(x) &= \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x. \end{aligned}$$

Etter formel (6) i Kreyszig 10.7 har vi

$$E_N^* = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \pi \sum_{n=1}^N b_n^2.$$

Her er  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx = \pi^3/12$ , og vi legg merke til at  $E_{N+1}^* = E_N^* - \pi b_{N+1}^2$ . Vi får

$$\begin{aligned} E_1^* &= \pi^3/12 - \pi b_1^2 \approx 1.311, & E_2^* &= E_1^* - \pi b_2^2 \approx 0.525, & E_3^* &= E_2^* - \pi b_3^2 \approx 0.509 \\ E_4^* &= E_3^* - \pi b_4^2 \approx 0.313, & E_5^* &= E_4^* - \pi b_5^2 \approx 0.311. \end{aligned}$$

**10.8.15** Gitt  $f(x) = \sin x$  for  $0 < x < \pi$ , 0 for  $x > \pi$ . Vi skal finne Fourier sinusintegralet til  $f(x)$ . Fra (12) Kreyszig s. 562 får vi, når vi bruker den trigonometriske formelen  $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$  (Rottmann s. 88),

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin wx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(1-w)x - \cos(1+w)x] dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(1-w)x}{1-w} - \frac{\sin(1+w)x}{1+w} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(1-w)\pi}{1-w} - \frac{\sin(1+w)\pi}{1+w} \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin \pi w}{1-w} + \frac{\sin \pi w}{1+w} \right] = \frac{2 \sin \pi w}{\pi(1-w^2)} \end{aligned}$$

idet  $\sin(1-w)\pi = \sin(\pi - \pi w) = \sin \pi w$  og  $\sin(1+w)\pi = \sin(\pi w + \pi) = -\sin \pi w$ .

Dermed blir Fourier sinusintegralet ((13) Kreyszig s. 562)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi w}{1-w^2} \sin wx dw$$

dvs.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi w}{1-w^2} \sin wx dw = \begin{cases} \pi(\sin x)/2 & \text{for } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{for } x > \pi. \end{cases}$$

**10.10.09** Vi har fordi  $f$  er en odde funksjon.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos xw - i \sin xw) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i \sin xw) dx = \\ &- 2i \int_0^{\infty} f(x) \sin xw dx = -2i \int_0^a \sin xw dx = 2i \left( \frac{1 - \cos aw}{w} \right) \end{aligned}$$

Altså er

$$\mathcal{F}(f)(w) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos aw}{w}$$

Merk at nær 0 har vi  $\cos aw = 1 - \frac{(aw)^2}{2} + \frac{(aw)^4}{24} - \dots$ , så nær 0 oppfører  $\mathcal{F}(f)(w)$  som  $\frac{ia^2w}{\sqrt{2\pi}}$ .

**D-19/75020 aug 93 /oppgave 5**

Bestem funksjonene  $A(w)$  og  $B(w)$  i Fourierintegralet for  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ e^{-x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$

Ved f.eks. bruk av formlene 132 og 133 i Rottmann side 144, eller ved to gangers delvis integrasjon finner vi

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos wx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+w^2}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin wx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\sin wx - w \cos wx) \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \frac{w}{1+w^2}. \end{aligned}$$

Funksjonen  $f(x)$  oppfyller forutsetningene i teoremet om Fourierintegral (Kreyszig 10.8 Teorem 1). Altså er

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2} dw + \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{1+w^2} dw \right\} = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 0, \\ e^{-x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Hvis vi setter inn  $x = 1$  og  $x = -1$  i Fourierintegralet, finner vi at

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw + \int_0^{\infty} \frac{w \sin w}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{e}$$

og

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw - \int_0^{\infty} \frac{w \sin w}{1+w^2} dw = 0.$$

Addisjon av ligningene (1) og (2) og divisjon med 2 gir

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2e}, \quad \text{og av (1) får vi} \quad \int_0^{\infty} \frac{w \sin w}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2e}.$$