

10.10.07 Vi skal finne den Fouriertransformerte av

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Ved bruk av definisjonen av Fouriertransformasjonen (ligning (6), side 570 i Kreyszig(8. utg.)) og delvis integrasjon finner vi

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} xe^{-x} e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-1-iw} xe^{-(1+iw)x} - \frac{1}{(-1-iw)^2} e^{-(1+iw)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)^2}. \end{aligned}$$

Kommentar til innsetting av grensene i utregningen over:

$$xe^{-x}e^{-iwx} = xe^{-x}(\cos wx - i \sin wx) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

idet $xe^{-x} = x/e^x \rightarrow 0$ og $\sin wx$ og $\cos wx$ er begrenset.

10.10.15 Finn $\mathcal{F}\{f(x)\}$ med $f(x) = xe^{-x}$ for $x > 0$, $f(x) = 0$ ellers.

Hint: Konvolusjonen $g(x) * g(x) = f(x)$ når $g(x) = e^{-x}$ for $x > 0$, $g(x) = 0$ ellers.

Det må vi sjekke. Vi har

$$g(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(p)g(x-p) dp = \int_0^{\infty} g(p)g(x-p) dp$$

siden $g(p)$ er 0 for $p < 0$. Videre er $g(x-p) = 0$ for $p > x$. Dermed er $g(x) * g(x) = 0$ for $x < 0$, og for $x > 0$ får vi

$$g(x) * g(x) = \int_0^x g(p)g(x-p) dp = \int_0^x e^{-p}e^{-x+p} dp = xe^{-x}.$$

Vi har

$$\mathcal{F}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-iwx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+iw} e^{-x-iwx} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+iw}$$

siden $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x-iwx} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}(\cos wx - i \sin wx) = 0$. Dermed får vi:

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(g)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+iw)^2}$$

8.8.5 Vi skal finne dw/dt for $w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ der $x = \cos t$, $y = \sin t$ og $z = t$ ved å bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (-\sin t) - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \cos t - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot 1 \\ &= \frac{\cos t \sin t}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{\sin t \cos t}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Vi kontrollerer svaret ved å sette inn for x , y og z før vi deriverer:

$$\begin{aligned} w &= (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^{-1/2} = (1+t^2)^{-1/2} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{2}(1+t^2)^{-3/2} \cdot 2t = -t(1+t^2)^{-3/2} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

8.8.7 Vi skal finne $\partial w/\partial u$ og $\partial w/\partial v$ for $w = xy$ der $x = e^u \cos v$ og $y = e^u \sin v$ ved å bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= y \cdot e^u \cos v + x \cdot e^u \sin v = e^{2u} \sin v \cos v + e^{2u} \cos v \sin v = e^{2u} \sin 2v \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= y \cdot e^u (-\sin v) + x \cdot e^u \cos v = -e^{2u} \sin v \sin v + e^{2u} \cos v \cos v = e^{2u} \cos 2v. \end{aligned}$$

Vi kontrollerer svaret ved å sette inn for x og y før vi deriverer:

$$\begin{aligned} w &= e^u \cos v \cdot e^u \sin v = e^{2u} \sin v \cos v = \frac{1}{2} e^{2u} \sin 2v \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= e^{2u} \sin 2v, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = e^{2u} \cos 2v. \end{aligned}$$

D-27/75020 des 94 / oppgave 3 a) Vi søker den Fouriertransformerte til funksjonen $f(x)$ som er gitt ved $f(x) = 2 - |x|$ for $-2 \leq x \leq 2$ og 0 ellers.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 (2 - |x|) e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 (2 - |x|)(\cos wx - i \sin wx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 \underbrace{(2 - |x|) \cos wx}_{\text{jevn funksjon}} - i \underbrace{(2 - |x|) \sin wx}_{\text{odde funksjon}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 (2 - x) \cos wx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(2 - x) \frac{\sin wx}{w} - \frac{\cos wx}{w^2} \right]_0^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos 2w}{w^2} \right] \end{aligned}$$

Alternativt kan vi sette $2 - |x| = 2 - x$ for $x > 0$ og $2 - |x| = 2 + x$ for $x < 0$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 (2 - |x|) e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-2}^0 (2 + x) e^{-iwx} dx + \int_0^2 (2 - x) e^{-iwx} dx \right] = \dots \end{aligned}$$

b) Vi skal beregne $\int_0^{\infty} \sin^2 w/w^2 dw$ ved hjelp av resultatet i a). Vi bruker identiten $1 - \cos 2w = 2 \sin^2 w$ og invers Fouriertransformasjon.

Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2w}{w^2} e^{iwx} dw = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} e^{iwx} dw \quad (\text{for alle } x). \end{aligned}$$

Med $x = 0$ får vi, siden $f(0) = 2$ og $\sin^2 w/w^2$ er en jevn funksjon,

$$2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw \quad \text{som gir} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = \frac{\pi}{2}.$$

D-74/SIF5005 mai 01 /oppgave 3 Ved kjernerregelen (kjederegelen) gjelder

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle \\ &= \langle 2, 1, -4 \rangle \cdot \frac{\langle 7, 5, 1 \rangle}{|\langle 7, 5, 1 \rangle|} \cdot 1000 \text{ }^\circ\text{C/h} = \frac{14 + 5 - 4}{\sqrt{49 + 25 + 1}} \cdot \frac{1000}{60} \text{ }^\circ\text{C/min} = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ }^\circ\text{C/min}. \end{aligned}$$

D-75/SIF5005 mai 02 /oppgave 2 La $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ være enhetsvektoren som står vinkelrett på vektorene $\vec{j} + \vec{k}$, $2\vec{i} + \vec{j}$ og med positiv k -komponent. Dette gir ligningene,

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_2 + u_3 = 0 \\ (2) \quad & 2u_1 + u_2 = 0 \end{aligned}$$

Etter litt regning finner vi at $\vec{u} = \frac{1}{3}(i - 2j + 2k)$.

Partiellderivert av $f = xyz$ gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy.$$

Gradienten til f i punktet $P_0(1, -1, 2)$ er

$$\text{grad}(f) = (-1 \cdot 2)i + (1 \cdot 2)j + (1 \cdot -1)k = -2i + 2j - k.$$

Den retningsderiverte av f i \vec{u} -retningen er derfor

$$D_{\vec{u}}f = \text{grad}f \cdot \vec{u} = \frac{1}{3}(-2 - 4 - 2) = -\frac{8}{3}.$$