TMA4135 matematikk 4D Øving 6

Løsningsforslag øving 6 høst 2004

10.10.07 Vi skal finne den Fouriertransformerte av

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Ved bruk av definisjonen av Fouriertransformasjonen (ligning (6), side 570 i Kreyszig(8. utg.)) og delvis integrasjon finner vi

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} xe^{-x} e^{-iwx}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-1-iw} xe^{-(1+iw)x} - \frac{1}{(-1-iw)^2} e^{-(1+iw)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)^2}. \end{aligned}$$

Kommentar til innsetting av grensene i utregningen over:

$$xe^{-x}e^{-iwx} = xe^{-x}(\cos \omega x - i \sin \omega x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

idet $xe^{-x} = x/e^x \to 0$ og $\sin \omega x$ og $\cos \omega x$ er begrenset.

10.10.15 Finn $\mathcal{F}\{f(x)\}$ med $f(x) = xe^{-x}$ for $x > 0$, $f(x) = 0$ ellers.
Hint: Konvolusjonen $g(x) * g(x) = f(x)$ når $g(x) = e^{-x}$ for $x > 0$, $g(x) = 0$ ellers.
Det må vi sjekke. Vi har

$$g(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(p) g(x-p)\, dp = \int_0^{\infty} g(p) g(x-p)\, dp$$

siden $g(p)$ er 0 for $p < 0$. Videre er $g(x-p) = 0$ for $p > x$. Dermed er $g(x) * g(x) = 0$ for $x < 0$, og for $x > 0$ får vi

$$g(x) * g(x) = \int_0^x g(p) g(x-p) dp = \int_0^x e^{-p} e^{-x+p} dp = xe^{-x}.$$

Vi har

$$\mathcal{F}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-iwx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+iw} e^{-x-iwx} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+iw}$$

siden $\lim_{x\to\infty} e^{-x-iwx} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(\cos wx - i \sin wx) = 0$. Dermed får vi:

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+iw)^2}$$

8.8.5 Vi skal finne dw/dt for $w = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ der $x = \cos t$, $y = \sin t$ og $z = t$ ved å bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot (-\sin t) - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \cos t - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot 1 \\ &= \frac{\cos t \sin t}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{\sin t \cos t}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Vi kontrollerer svaret ved å sette inn for x, y og z før vi deriverer:

$$\begin{aligned} w &= (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^{-1/2} = (1+t^2)^{-1/2} \\ \frac{dw}{dt} &= -\tfrac{1}{2}(1+t^2)^{-3/2} \cdot 2t = -t(1+t^2)^{-3/2} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

8.8.7 Vi skal finne $\partial w/\partial u$ og $\partial w/\partial v$ for $w = xy$ der $x = e^u \cos v$ og $y = e^u \sin v$ ved å bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= y \cdot e^u \cos v + x \cdot e^u \sin v = e^{2u} \sin v \cos v + e^{2u} \cos v \sin v = e^{2u} \sin 2v \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= y \cdot e^u(-\sin v) + x \cdot e^u \cos v = -e^{2u} \sin v \sin v + e^{2u} \cos v \cos v = e^{2u} \cos 2v. \end{aligned}$$

Vi kontrollerer svaret ved å sette inn for x og y før vi deriverer:

$$w = e^u \cos v \cdot e^u \sin v = e^{2u} \sin v \cos v = \tfrac{1}{2} e^{2u} \sin 2v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = e^{2u} \sin 2v, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = e^{2u} \cos 2v.$$

D-27/75020 des 94 /oppgave 3 **a)** Vi søker den Fouriertransformerte til funksjonen $f(x)$ som er gitt ved $f(x) = 2 - |x|$ for $-2 \le x \le 2$ og 0 ellers.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} (2-|x|)\, e^{-iwx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} (2-|x|)(\cos wx - i \sin wx)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} \Big(\underbrace{(2-|x|)\cos wx}_{\text{jevn funksjon}} - i\,\underbrace{(2-|x|)\sin wx}_{\text{odde funksjon}}\Big)\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} (2-x)\cos wx\,dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(2-x)\frac{\sin wx}{w} - \frac{\cos wx}{w^2}\right]_0^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1-\cos 2w}{w^2}\right] \end{aligned}$$

Alternativt kan vi sette $2 - |x| = 2 - x$ for $x > 0$ og $2 - |x| = 2 + x$ for $x < 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} (2-|x|)\, e^{-iwx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-2}^{0} (2+x) e^{-iwx}\,dx + \int_{0}^{2} (2-x) e^{-iwx}\,dx \right] = \ldots \end{aligned}$$

b) Vi skal beregne $\int_0^\infty \sin^2 w/w^2\,dw$ ved hjelp av resultatet i a). Vi bruker identiten $1 - \cos 2w = 2\sin^2 w$ og invers Fouriertransformasjon.

Vi har

$$\begin{aligned} f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(w)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx}\,dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2w}{w^2} e^{iwx}\,dw = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} e^{iwx}\,dw \qquad \text{(for alle } x\text{).} \end{aligned}$$

Med $x = 0$ får vi, siden $f(0) = 2$ og $\sin^2 w/w^2$ er en jevn funksjon,

$$2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2}\,dw = 2\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 w}{w^2}\,dw \quad \text{som gir} \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 w}{w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}.$$

D-74/SIF5005 mai 01 /oppgave 3 Ved kjerneregelen (kjederegelen) gjelder

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right\rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\rangle \\ &= \langle 2, 1, -4\rangle \cdot \frac{\langle 7,5,1\rangle}{|\langle 7,5,1\rangle|}\cdot 1000\ ^\circ\mathrm{C/h} = \frac{14+5-4}{\sqrt{49+25+1}}\cdot\frac{1000}{60}\ ^\circ\mathrm{C/min} = \frac{50}{\sqrt{3}}\ ^\circ\mathrm{C/min}.\end{aligned}$$

D-75/SIF5005 mai 02 /oppgave 2 La $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ være enhetsvektoren som står vinkelrett på vektorene $j + k$, $2i + j$ og med positiv k-komponent. Dette gir ligningene,

$$\begin{aligned} &(1) \qquad & u_2 + u_3 &= 0 \\ &(2) \qquad & 2u_1 + u_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Etter litt regning finner vi at $\vec{u} = \frac{1}{3}(i - 2j + 2k)$.
Partiellderivering av $f = xyz$ gir

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy.$

Gradienten til f i punktet $P_0(1, -1, 2)$ er

$\mathrm{grad}(f) = (-1\cdot 2)i + (1\cdot 2)j + (1\cdot -1)k = -2i + 2j - k.$

Den retningsderiverte av f i $\vec{u}$-retningen er derfor

$D_{\vec{u}}f = \mathrm{grad}f\cdot\vec{u} = \frac{1}{3}(-2-4-2) = -\frac{8}{3}.$