11.3.17 Vi skal bruke metoden med separasjon av variable (produktmetoden) til å finne løsninger av den partielle differensialligningen $u_{xy} - u = 0$.

Vi setter $u(x, y) = F(x)G(y)$ inn i differensialligningen $u_{xy} = u$, får

$$F'(x)G'(y) = F(x)G(y) \quad \text{og omformer til} \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G(y)}{G'(y)}.$$

Her avhenger venstresiden bare av x og høyresiden bare av y. Følgelig må uttrykket være konstant, $F'(x)/F(x) = G(y)/G'(y) = k$. Det gir to ordinære differensialligninger

$$F'(x) - kF(x) = 0 \qquad \text{og} \qquad kG'(y) - G(y) = 0$$

som begge er lineœre. Differensialligningen $y' + ay = 0$ har generell løsning $y = Ce^{-ax}$. Følgelig får vi her

$$F(x) = C_1 e^{kx} \qquad \text{og} \qquad G(y) = C_2 e^{y/k}.$$

Løsningene av $u_{xy} - u = 0$ av formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ blir dermed

$$u(x, y) = C_1 e^{kx} \cdot C_2 e^{y/k} = Ce^{kx+y/k}$$

der $C = C_1 \cdot C_2$ og $k \neq 0$ er vilkårlige konstanter.

11.5.17 Oppgåva er eit spesialtilfelle av det problemet som blir gjennomgått i læreboka på sidene 606–607, med $a = b = 24$, $f(x) = 20$. Vi får derfor løysing

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\frac{n\pi x}{24} \sinh\frac{n\pi y}{24},$$

der

$$A_n^* = \frac{2}{24 \sinh n\pi} \int_0^{24} 20 \sin\frac{n\pi x}{24}\, dx.$$

Vi finn at

$$I_n = \int_0^{24} \sin\frac{n\pi x}{24}\, dx = -\frac{24}{\pi n}\left[\cos\frac{n\pi x}{24}\right]_0^{24} = \frac{24}{\pi n}\left[1 - \cos n\pi\right] = \frac{24}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right].$$

Dette gir $I_{2m} = 0$, $I_{2m+1} = \frac{48}{\pi(2m+1)}$, og dermed

$$\begin{aligned} A_{2m}^* &= 0, \\ A_{2m+1}^* &= \frac{48 \cdot 2 \cdot 20}{\pi(2m+1) \cdot 24 \sinh(2m+1)\pi} = \frac{80}{\pi(2m+1)\sinh(2m+1)\pi} \end{aligned}$$

Løysinga blir då

$$u(x, y) = \frac{80}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{24}\right) \sinh\left(\frac{(2m+1)\pi y}{24}\right)}{(2m+1)\sinh(2m+1)\pi}.$$

SIF5016 des 99 /oppgave 3 **a)** Separasjon av variable:

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t): \qquad FG'' - F''G + FG = 0, \quad F'(0) = 0,\ F'(\pi) = 0$$

$$\frac{G''}{G} + 1 = \frac{F''}{F} = -\lambda \quad \text{(konstant)}$$

$$\text{(I)} \quad F'' + \lambda F = 0, \quad F'(0) = 0,\ F'(\pi) = 0, \qquad \text{(II)} \quad G'' + (\lambda+1)G = 0$$

$$\text{(I)} \quad \lambda < 0,\ \lambda = -\alpha^2: \quad F(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},\ F'(x) = \alpha Ae^{\alpha x} - \alpha Be^{-\alpha x}$$

$$F'(0) = 0,\ F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0,\ F(x) = 0$$

$$\lambda = 0: \quad F(x) = Ax + B,\ F'(x) = A, \quad F'(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0,\ F_0(x) = 1$$

$$\lambda > 0,\ \lambda = \alpha^2: \quad F(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x,\ F'(x) = -\alpha A\sin\alpha x + \alpha B\cos\alpha x$$

$$F'(0) = 0 \Rightarrow B = 0,\ F'(\pi) = 0 \Rightarrow \alpha = n,\ \lambda = n^2,\ F_n(x) = \cos nx,\ n \geq 1$$

$$\text{(II)} \quad \lambda = 0: \quad G'' + G = 0,\ G_0(t) = C_0\cos t + D_0 \sin t$$

$$\lambda = n^2: \quad G'' + (n^2+1)G = 0,\ G_n(t) = C_n\cos\sqrt{n^2+1}\,t + D_n\sin\sqrt{n^2+1}\,t$$

$$u_0(x,t) = C_0\cos t + D_0\sin t$$

$$u_n(x,t) = \big(C_n\cos\sqrt{n^2+1}\,t + D_n\sin\sqrt{n^2+1}\,t\big)\cos nx,\ n \geq 1$$

$$\text{dvs. } u_n(x,t) = \big(C_n\cos\sqrt{n^2+1}\,t + D_n\sin\sqrt{n^2+1}\,t\big)\cos nx,\ n = 0,1,2,\ldots$$

b) Superposisjonprinsippet:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(C_n\cos\sqrt{n^2+1}\,t + D_n\sin\sqrt{n^2+1}\,t\big)\cos nx$$

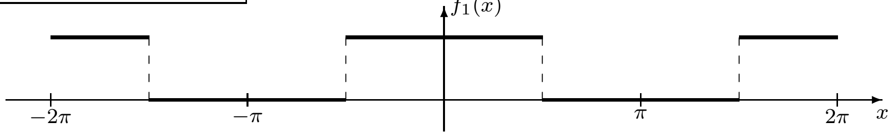
$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(-C_n\sqrt{n^2+1}\sin\sqrt{n^2+1}\,t + D_n\sqrt{n^2+1}\cos\sqrt{n^2+1}\,t\big)\cos nx$$

$$1 + 2\cos x = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\cos nx \Rightarrow C_0 = 1,\ C_1 = 2,\ C_n = 0 \text{ for } n \geq 2$$

$$\cos 2x = u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\sqrt{n^2+1}\cos nx \Rightarrow D_2 = 1/\sqrt{5},\ D_n = 0 \text{ for } n \neq 2$$

$$u(x,t) = \cos t + 2\cos\sqrt{2}\,t\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t\cos 2x$$

SIF5016 des 99 /oppgave 3 **a)**



$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi} \\
a_n &= 0 \text{ for } n \text{ partall}, \quad a_n = \frac{2}{n\pi} \text{ for } n = 1, 5, \ldots, \quad a_n = \frac{-2}{n\pi} \text{ for } n = 3, 7, \ldots
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - + \cdots\Big) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m \cos(2m+1)x}{2m+1}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = F(x)\cdot G(t) \quad \text{innsettes i (1)}: \\
&F''G = FG + FG', \quad \frac{F''}{F} = 1 + \frac{G'}{G} = k \quad \text{(konstant)} \\
&\text{(I)} \quad F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0,\ F'(\pi) = 0, \qquad \text{(II)} \quad G' - (k-1)G = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & k > 0,\ k = \mu^2: \quad F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},\ F'(x) = \mu A e^{\mu x} - \mu B e^{-\mu x} \\
& \quad F'(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0,\ F(x) = 0 \\
& k = 0: \quad F(x) = A + Bx,\ F'(x) = B \\
& \quad F'(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow B = 0,\ F(x) = 1,\ (A = 1) \\
& k < 0,\ k = -p^2: \ F(x) = A\cos px + B\sin px,\ F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px \\
& \quad F'(0) = 0 \Rightarrow B = 0,\ F'(\pi) = 0,\ A \neq 0 \Rightarrow p = n, \quad F(x) = \cos nx,\ (A = 1) \\
& F(x) = \cos nx,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\
\text{(II)} \quad & k = -n^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots: \quad G' + (n^2+1)G = 0,\ G(t) = Ce^{-(n^2+1)t}
\end{aligned}
$$

Løsningene av (1) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (2):

$$
u_n(x,t) = C_n e^{-(n^2+1)t}\cos nx, \quad C_n \text{ vilkårlig konstant, } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots
$$

c) Superposisjonprinsippet:

$$
u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(n^2+1)t}\cos nx \quad \text{oppfyller (1) og (2)}
$$

$$
f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos nx \ \Rightarrow\ C_n = a_n \overset{\textbf{a)}}{=} \begin{cases} 1/2 & \text{for } n = 0 \\ 2/(n\pi) & \text{for } n = 1, 5, \ldots \\ -2/(n\pi) & \text{for } n = 3, 7, \ldots \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{\pi}\Big(e^{-2t}\cos x - \frac{1}{3}e^{-(3^2+1)t}\cos 3x + \frac{1}{5}e^{-(5^2+1)t}\cos 5x - + \cdots\Big) \\
&= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}e^{-[(2m+1)^2+1]t}\cos(2m+1)x, \quad 0 \le x \le \pi,\ t > 0
\end{aligned}
$$

Omformer: $2\cos x \cdot \cos 2x = \cos(x - 2x) + \cos(x + 2x) = \cos x + \cos 3x$

$$
\cos x + \cos 3x = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos nx \ \Rightarrow\ C_1 = 1,\ C_3 = 1,\ C_n = 0 \text{ ellers}
$$

$$
u(x,t) = e^{-(1^2+1)t}\cos x + e^{-(3^2+1)t}\cos 3x = e^{-2t}\cos x + e^{-10t}\cos 3x
$$

SIF5016 des 99 /oppgave 3 **a)** Vi bruker delvis integrasjon for å beregne b_1:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{2}\cos 2x\,dx}_{0}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Siden $b_n = (-1)^n n/(n^2-1)$ for $n \ge 2$, har $f(x) = (x/2)\cos x$ sinusrekke

$$\frac{x}{2}\cos x = -\frac{1}{4}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{n^2-1}, \qquad 0 < x < \pi.$$

b) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i ligningen (1) og separerer variable:

$$F''G = FG'' + 2FG'\,, \qquad \frac{F''}{F} = \frac{G''+2G'}{G} = k \text{ (konstant)}, \qquad \begin{aligned} &F'' - kF = 0 \\ &G'' + 2G' - kG = 0 \end{aligned}$$

Randbetingelsene (2) medfører $F(0) = F(\pi) = 0$ og, som i Kreyszig 11.3, får vi løsninger $F(x) \not\equiv 0$ når $k = -n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Da blir $F_n(x) = \sin nx$.

Når $k = -n^2$ får vi for $G(t)$ ligningen

$$G'' + 2G' + n^2 G = 0.$$

Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 2\lambda + n^2 = 0$ har løsning $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ når $n = 1$ og $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{n^2-1}$ når $n > 1$. Dermed blir

$$\begin{aligned} &G_1(t) = (A_1 + B_1 t)e^{-t} \quad \text{for } n = 1 \\ &G_n(t) = e^{-t}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t) \quad \text{for } n = 2,3,\ldots \end{aligned}$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2-1}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. For $u(x,t) = F(x)G(t)$ får vi

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= F_1(x)G_1(t) = (A_1 + B_1 t)\,e^{-t}\sin x \\ u_n(x,t) &= F_n(x)G_n(t) = e^{-t}\big(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\big)\sin nx, \quad n = 2,3,\ldots \end{aligned}$$

c) Siden ligningen (1) er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene (2). Vi setter følgelig

$$u(x,t) = (A_1 + B_1 t)e^{-t}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-t}\big(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\big)\sin nx$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 1,2,3,\ldots$ slik at initialbetingelsene (3) blir oppfylt. Leddvis derivasjon mhp. t gir

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = &\big[B_1 - (A_1 + B_1 t)\big]e^{-t}\sin x \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} e^{-t}\big[(-\omega_n A_n\sin\omega_n t + \omega_n B_n\cos\omega_n t) - (A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)\big]\sin nx. \end{aligned}$$

Til bestemmelse av A_n og B_n får vi dermed, når vi bruker sinusrekka i a) for $(x/2)\cos x$:

(i) $$-\frac{1}{4}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sin nx}{n^2-1} \overset{(3)}{=} u(x,0) = A_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin nx$$

(ii) $$0 \overset{(3)}{=} u_t(x,0) = (B_1 - A_1)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(\omega_n B_n - A_n)\sin nx$$

Av (i) får vi $A_1 = -1/4$ og $A_n = (-1)^n n/(n^2-1)$ for $n \geq 2$. Av (ii) får vi $B_1 - A_1 = 0$ og $\omega_n B_n - A_n = 0$ for $n \geq 2$. Det gir $B_1 = A_1$ og $B_n = A_n/\omega_n$ for $n \geq 2$. Siden $\omega_n = \sqrt{n^2-1}$, blir svaret

$$u(x,t) = -\frac{1}{4}(1+t)e^{-t}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sin nx}{n^2-1} e^{-t}\Big(\cos\sqrt{n^2-1}\,t + \frac{\sin\sqrt{n^2-1}\,t}{\sqrt{n^2-1}}\Big).$$