TMA4135 matematikk 4D Øving 8

Løsningsforslag øving 8 høst 2004

11.6.3 Vi skal finne en løsning på integralform av varmeligningen $u_t = c^2 u_{xx}$ med intialbetingelse $u(x,0) = f(x)$ der $f(x) = 1$ for $|x| < 1$ og $f(x) = 0$ ellers.

Kreyszig 11.6, formel (6):

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]\mathrm{e}^{-c^2p^2t}\,\mathrm{d}p.$$

Initialbetingelsen gir

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]\,\mathrm{d}p.$$

Ved hjelp av formlene for Fourierintegralet i Kreyszig 10.8 får vi

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos px\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos px\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\sin p}{p}$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin px\,\mathrm{d}x = 0.$$

Svaret blir altså

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\mathrm{e}^{-c^2p^2t}\cos px\,\mathrm{d}p.$$

SIF5013 sommer 03 oppgave 5 **a)** For koeffisientene i cosinusrekka får vi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_1^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_1^2 \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\bigg|_1^2 = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2n - \sin n}{n}.$$

Følgelig har $f(x)$ cosinusrekke

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n - \sin n}{n}\cos nx.$$

La $S(x)$ betegne summen av rekka for vilkårlig x. For $x = 1$ og $x = -\pi/2$ får vi

$$S(1) = \frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{jevn}}{=} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

b) Dersom $u(x,t) = F(x)G(t)$ oppfyller (i) og (ii), må vi ha

$$F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0 \qquad \text{og} \qquad G' - kG = 0$$

for en konstant k. Fra Kreyszig 11.5 (adiabatiske randbetingelser) vet vi at ikke-trivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = \cos nx$ for $k = -n^2$ der $n = 0, 1, 2, \ldots$. For $G(t)$ får vi $G' + n^2G = 0$ som gir $G_n(t) = A_n\mathrm{e}^{-n^2t}$ der A_n er en vilkårlig konstant. For $u(x,t) = F(x)G(t)$ får vi dermed

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n\mathrm{e}^{-n^2t}\cos nx, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\ .$$

Siden (i) er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller (ii). Vi setter følgelig $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-n^2 t} \cos nx$, og bestemmer koeffisientene A_n slik at betingelsen (iii) blir oppfylt:

Vi skal ha $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi $A_0 = 1/\pi$ og $A_n = (2/\pi)(\sin 2n - \sin n)/n$ for $n = 1, 2, \ldots$ og følgelig

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} \mathrm{e}^{-n^2 t} \cos nx.$$

D-22 Vi set $\mathcal{F}\{u(x,y)\} = \widehat{u}(w,y) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-iwx}\, dx$.
Sidan $u(x,y) \to 0$ og $u_x(x,y) \to 0$ når $x \to \pm\infty$ har vi

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -w^2 \widehat{u}.$$

(Sjå formel (10) i Kreyszig 10.10.) Derivasjon under integralteiknet gjev

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) e^{-iwx}\, dx = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-iwx}\, dx\right) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y}.$$

Ved å Fouriertransformere differensiallikninga $u_{xx} = u_y + u$ får vi derfor

$$-w^2 \widehat{u} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} + \widehat{u} \qquad \text{altså} \qquad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} + (1 + w^2)\widehat{u} = 0.$$

Dette er ei ordinær differensiallikning (derivasjon berre med omsyn på y) med løysing

$$\widehat{u}(w,y) = C(w) e^{-(1+w^2)y}$$

der $C(w)$ er ein vilkårleg funksjon av w. Spesielt blir $\widehat{u}(w,0) = C(w)$. Av $u(x,0) = f(x)$ får vi også

$$\widehat{u}(w,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx = \widehat{f}(w).$$

Altså er $C(w) = \widehat{f}(w)$ og dermed

$$\widehat{u}(w,y) = \widehat{f}(w) e^{-(1+w^2)y}.$$

Vi kan skrive dette som

$$(*) \qquad \widehat{u}(w,y) = e^{-y}\sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(w)\, \widehat{g}(w) \qquad \text{der} \qquad \widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-yw^2}.$$

Av formelen $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = (1/\sqrt{2a}) e^{-w^2/4a}$ (sjå Kreyszig 10.11 tabell III) får vi med $a = 1/4y$ at $\mathcal{F}(e^{-x^2/4y}) = \sqrt{2y}\, e^{-yw^2}$. For funksjonen

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2y}} e^{-x^2/4y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-x^2/4y} \quad \text{har vi då} \quad \widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-yw^2}.$$

Av $(*)$ får vi ved konvolusjonsteoremet at

$$u(x,y) = e^{-y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) g(p)\, dp = \frac{e^{-y}}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) e^{-p^2/4y}\, dp.$$

(Hugs at y er ein konstant under transformasjonen.) Ved substitusjonen $p = 2t\sqrt{y}$ (og dermed $dp = 2\sqrt{y}\,dt$) går dette over til

$$u(x,y) = \frac{2\sqrt{y}\,e^{-y}}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2t\sqrt{y})e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2t\sqrt{y})e^{-t^2}\,dt.$$

Dette viser at vi kan skrive $u(x,y) = (e^{-y}/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2t\sqrt{y})h(t)\,dt$ med $h(t) = e^{-t^2}$.

D-25 **a.** Vi skal finne løsninger av

(1) $$u_{xx} + tu_t = 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \qquad t \ge 0$$

på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredstiller randkravene

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{for } t \ge 0.$$

Settes $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i (1), får vi ligningen

$$F''G + tF\dot{G} = 0$$

Divisjon med FG på begge sider og sortering av ledd gir

$$\frac{F''}{F} = -t\frac{\dot{G}}{G} = \lambda$$

der λ må være en konstant, siden uttrykket til venstre kun er avhengig av x og uttrykket til høyre kun er avhengig av t. Problemet reduseres til to ordinære differensialligninger

(2) $$F'' - \lambda F = 0$$

(3) $$t\dot{G} + \lambda G = 0$$

Ligning (2) har disse løsningene:

$\lambda > 0:\ F(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$

$\lambda = 0:\ F(x) = A + Bx$

$\lambda < 0:\ F(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$

Randkravene $F(0)G(t) = F(\pi)G(t) = 0,\ t > 0$, gir to muligheter. Enten må $G(t) = 0$ for alle t, men den løsningen er uinteressant, eller så må $F(0) = F(\pi) = 0$. For $\lambda \ge 0$ gir dette $A = B = 0$. For $\lambda < 0$, får vi $F(0) = A = 0$ og $F(\pi) = B\sin(\pi) = 0$. Når $\lambda = -n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$, kan B velges fritt.

Med denne begrensningen på λ blir $G(t) = t^{n^2}$ løsningen av (3). Da er

$$u_n(x,t) = B_n \sin(nx)t^{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

de søkte løsningene av (1).

b. Vi skal finne en løsning av (1) som oppfyller betingelsen

$$u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Siden (1) er homogen og lineær i u, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^{n^2} \sin(nx)$ også en løsning av differensialligningen hvis den eksisterer og er to ganger deriverbar. Vi ser at $u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$, når $B_n = \frac{1}{n^3}$. Da er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} t^{n^2}$$

en løsning av differensialligningen.

D-69 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x,y,z) = z^3 - (x^2+y)z + e^x + y^3 + 1.$$

Skal beregne den retningsderiverte til f i punktet $(0,-1,1)$ i retningen $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Her er

$$\nabla f(x,y,z) = (-2xz + e^x)\vec{\imath} + (-z + 3y^2)\vec{\jmath} + (3z^2 - x^2 - y)\vec{k},$$

og en enhetsvektor i den angitte retningen er

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\| \vec{v} \|} = \tfrac{2}{3}\vec{\imath} - \tfrac{2}{3}\vec{\jmath} + \tfrac{1}{3}\vec{k}.$$

Den retningsderiverte man skal beregne er

$$D_{\vec{u}} f(0,-1,1) = \nabla f(0,-1,1) \cdot \vec{u} = (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}) \cdot (\tfrac{2}{3}\vec{\imath} - \tfrac{2}{3}\vec{\jmath} + \tfrac{1}{3}\vec{k}) = \frac{2}{3}.$$

En normal til tangentplanet til flaten gitt ved $f(x,y,z) = 3$ i punktet $(0,-1,1)$ er $\nabla f(0,-1,1) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Det søkte planet er derfor gitt ved

$$1 \cdot (x-0) + 2 \cdot (y-(-1)) + 4 \cdot (z-1) = 0,$$

eller,

$$x + 2y + 4z = 2.$$