5.1.16 Vi skal finne Laplacetransformasjonen til funksjonen gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} \frac{b}{a}t, & 0 \le t < a \\ 0 & a \le t \end{cases}$$

Fra definisjonen og ved delvis integrasjon blir

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-st}\frac{b}{a}tdt \\ &= \frac{b}{a}\left(\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^a + \frac{1}{s}\int_0^a e^{-st}dt\right) \\ &= \frac{b}{a}\left(-\frac{a}{s}e^{-as} + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^a\right) \\ &= \frac{b}{as}\left[\frac{1}{s} - (a+\frac{1}{s})e^{-as}\right] \end{aligned}$$

5.1.29 Vi skal finne Laplacetransformasjonen til funksjonen gitt ved

$$f(t) = t^2 e^{-3t} = g(t)e^{at}, \text{ der } g(t) = t^2, a = -3.$$

Ved første skifteteorem blir

$$F(s) = \frac{2}{(s-a)^3} = \frac{2}{(s+3)^3},$$

ettersom $\mathcal{L}(t^2) = 2/s^3$ (jf. tabell 5.1).

5.1.39 Vi omskriver telleren slik at hele brøken blir en funksjon av $\left(s+\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}.$$

Da kan vi bruke tabell 5.1, Kreyszig s. 254, til å finne den inverse Laplacetransformerte. Ved hjelp av formlene 11 og 12 (med $a = -1/2$ og $\omega = 1$) får vi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} = e^{-t/2}\cos t - \tfrac{1}{2}e^{-t/2}\sin t.$$

Alternativt kan vi bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$ (første forskyvningsregel/skiftteorem, Kreyszig 5.1 teorem 2) med $a = -1/2$ for å finne den inverse Laplacetransformerte. Her er

$$F\left(s+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1} \qquad \text{og følgelig} \qquad F(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s^2+1},$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos t - \tfrac{1}{2}\sin t$$

siden $\mathcal{L}^{-1}\left\{s/(s^2+1)\right\} = \cos t$ og $\mathcal{L}^{-1}\left\{1/(s^2+1)\right\} = \sin t$. Dermed er

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s+\tfrac{1}{2})\right\} = e^{-t/2}f(t) = e^{-t/2}\left(\cos t - \tfrac{1}{2}\sin t\right).$$

5.3.06 $f(t) = e^{-2t}u(t-3)$

Vi gir tre forskjellige måter å finne $F(s)$:

1 - DIREKTE UTREGNING

$$F(s) = \int_3^\infty \underbrace{e^{-2t}e^{-st}}_{e^{-t(s+2)}} dt = \left[\frac{e^{-t(s+2)}}{-(s+2)}\right]_{t=3}^\infty = \frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}, \text{ der } s > -2.$$

2 - FØRSTE SKIFTTEOREM

$$\mathcal{L}\{u(t-3)\} = \frac{e^{-3s}}{s}$$

Innsatt i første skiftteorem (Kreyszig 8 s.253) gir:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t-3)\} = \frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}$$

3 - ANDRE SKIFTTEOREM

Skriver om $f(t)$ slik at vi får $t-3$ overalt:

$$f(t) = e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3)$$
$$F(s) = e^{-6}\mathcal{L}\{e^{-2(t-3)}u(t-3)\} = e^{-6}e^{-3s}\underbrace{\mathcal{L}\{e^{-2t}\}}_{\frac{1}{s+2}} = \frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}$$

5.3.10

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{for } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$$

Me utnyttar sprangfunksjonen $u(t)$ og skriv $f(t) = (1-e^{-t})(u(t)-u(t-2))$. Vidare veit me at $u(t-2)e^{-t} = e^{-2}u(t-2)e^{-(t-2)}$, slik at me kan finna den Laplacetransformerte ved å nytta transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. skiftteorem/forskyvningsregel, Kreyszig s. 267 teorem 1).

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-e^{-t})(u(t) - u(t-2)) \\ &= u(t) - u(t)e^{-t} - u(t-2) + e^{-2}u(t-2)e^{-(t-2)}. \end{aligned}$$

Dette gjev oss når me bruker formel 6 i tabell 5.1 s. 254 i Kreyszig

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t)e^{-t}\} - \mathcal{L}\{u(t-2)\} + e^{-2}\mathcal{L}\{u(t-2)e^{-(t-2)}\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{s} + e^{-2}e^{-2s}\frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{s}(1-e^{-2s}) + \frac{1}{s+1}(e^{-2(s+1)} - 1). \end{aligned}$$

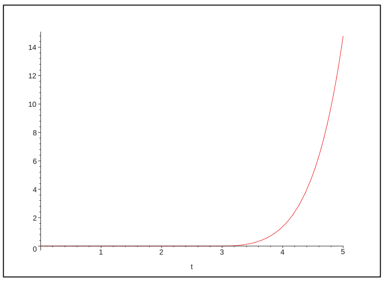
Oppgåva kan også løysast ut frå definisjonen av den Laplacetransformerte.

5.3.16 Vi skal finne invers Laplacetransformasjon til funksjonen

$$F(s) = e^{-3s}\frac{1}{(s-1)^3} = \frac{1}{2}e^{-3s}\frac{2}{(s-1)^3}.$$

Bruker andre skiftteorem med $a = 3$ og at $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s-1)^3}\} = e^t t^2$ og får at

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2}e^{t-3}(t-3)^2 u(t-3).$$



5.3.24

$$y'' - 5y' + 6y = r(t) = \begin{cases} 4e^t & \text{for } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{for } t > 2, \end{cases} \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

Her er

$$r(t) = 4e^t\big[1 - u(t-2)\big] = 4e^t - 4e^t u(t-2) = 4e^t - 4e^2 e^{t-2} u(t-2)$$

og følgelig

$$R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{4}{s-1} - \frac{4e^2 e^{-2s}}{s-1} \quad \text{ved skiftteorem 2, siden } \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}.$$

Vi kunne også brukt skiftteorem 1: Siden $\mathcal{L}\big\{u(t-2)\big\} = e^{-2s}/s$ blir $\mathcal{L}\big\{e^t u(t-2)\big\} = e^{-2(s-1)}/(s-1)$. Eller, som en tredje mulighet, integrert for å finne $R(s)$:

$$R(s) = \int_0^\infty e^{-st} r(t)\,dt = \int_0^2 e^{-st} 4e^t\,dt = \int_0^2 4e^{-(s-1)t}\,dt = \frac{4}{s-1} - \frac{4e^2 e^{-2s}}{s-1}.$$

Den Laplacetransformerte ligningen blir følgelig

$$\big(s^2 Y - s + 2\big) - 5(sY - 1) + 6Y = \frac{4}{s-1} - \frac{4e^2 e^{-2s}}{s-1}.$$

Vi flytter over $-s + 7$, deler med $s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$ og delbrøkoppspalter

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s-7}{(s-2)(s-3)} + \frac{4}{(s-1)(s-2)(s-3)} - \frac{4e^2 e^{-2s}}{(s-1)(s-2)(s-3)} \\ &= \Big(\frac{5}{s-2} - \frac{4}{s-3}\Big) + \Big(\frac{2}{s-1} - \frac{4}{s-2} + \frac{2}{s-3}\Big) - e^2\Big(\frac{2}{s-1} - \frac{4}{s-2} + \frac{2}{s-3}\Big)e^{-2s} \\ &= \Big(\frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s-3}\Big) - e^2\Big(\frac{2}{s-1} - \frac{4}{s-2} + \frac{2}{s-3}\Big)e^{-2s}. \end{aligned}$$

Tilslutt bruker vi $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$ og skiftteorem 2 for å finne $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$:

$$\begin{aligned} y &= 2e^t + e^{2t} - 2e^{3t} - e^2\big[2e^{t-2} - 4e^{2(t-2)} + 2e^{3(t-2)}\big]u(t-2) \\ &= \begin{cases} 2e^t + e^{2t} - 2e^{3t} & \text{for } 0 < t < 2 \\ (1 + 4e^{-2})e^{2t} - 2(1 + e^{-4})e^{3t} & \text{for } t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

5.4.06 Vi skal finne $\mathcal{L}(t^2\sin 2t)$ ved hjelp av formelen (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275. Siden $\mathcal{L}(\sin 2t) = 2/(s^2+4)$ får vi, ved å bruke formel (1) 2 ganger,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t\sin 2t) &= -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}\\ \mathcal{L}(t^2\sin 2t) &= \mathcal{L}\{t(t\sin 2t)\} = -\frac{d}{ds}\frac{4s}{(s^2+4)^2}\\ &= -\frac{(s^2+4)^2\cdot 4 - 2(s^2+4)2s\cdot 4s}{(s^2+4)^4} = \frac{4(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}.\end{aligned}$$

5.4.11 Me skal finna den inverse transformen til

$$F(s) = \frac{s^2-\pi^2}{(s^2+\pi^2)^2}.$$

Frå formel 7 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig veit me at

$$G(s) = \mathcal{L}\{\cos\pi t\} = \frac{s}{s^2+\pi^2}.$$

Vidare har me

$$G'(s) = -\frac{s^2-\pi^2}{(s^2+\pi^2)^2}$$

Derivasjon av Laplacetransformen til ein funksjon svarar til å multiplisera funksjonen med $-t$. Altså $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$. Dette gjev oss svaret

$$f(t) = t\cos\pi t.$$

5.5.09 Vi skal regne ut konvolusjonsproduktet $u(t-3) * e^{-2t} = \int_0^t u(\tau-3)e^{-2(t-\tau)}\,d\tau$.

Når $0 < t < 3$ får vi $u(t-3) * e^{-2t} = \int_0^t 0\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau = 0$ siden $u(\tau-3) = 0$ for $0 < \tau < t$ når $t < 3$.

Når $t > 3$ får vi

$$\begin{aligned}u(t-3) * e^{-2t} &= \int_0^t u(\tau-3)\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau = \int_0^3 0\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau + \int_3^t 1\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau\\ &= 0 + \tfrac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}\Big|_{\tau=3}^{t} = \tfrac{1}{2}\big[1-e^{-2(t-3)}\big].\end{aligned}$$

Svaret kan da skrives $u(t-3) * e^{-2t} = \frac{1}{2}\big[1-e^{-2(t-3)}\big]u(t-3)$.

5.5.29 Laplacetransformasjonen skal brukes til å løse integralligningen

$$y(t) = 1 - \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Vi ser at ligningen kan skrives $y(t) = 1 - t * y(t)$. Vi setter $Y = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen ved å bruke $\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$ (med $n = 0$ og 1) og konvolusjonsregelen. Det gir

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}Y(s).$$

Så løser vi ut $Y(s)$:

$$\left(1+\frac{1}{s^2}\right)Y(s) = \frac{1}{s}, \qquad \left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)Y(s) = \frac{1}{s}, \qquad Y(s) = \frac{s}{s^2+1},$$

og inverstransformerer tilslutt (ved hjelp av tabell):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t.$$

$\boxed{\text{5.6.06}}$ Me søkjer $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ for $F(s) = (s^3 - 3s^2 + 6^s - 4)/[s^2 - 2s + 2]^2$. Polynomet $s^2 - 2s + 2$ er irredusibelt, og me delbrøkoppspaltar derfor slik:

$$F(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 6s - 4}{(s^2 - 2s + 2)^2} = \frac{As + B}{(s^2 - 2s + 2)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 - 2s + 2}.$$

For å bestemma A, B, C og D multipliserer me med fellesnemnaren $(s^2 - 2s + 2)^2$ og samanliknar koeffisientane til s^n på begge sider av likskapsteiknet.

$$\begin{aligned} s^3 - 3s^2 + 6s - 4 &= As + B + (Cs + D)(s^2 - 2s + 2) \\ &= Cs^3 + (D - 2C)s^2 + (A + 2C - 2D)s + B + 2D \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llrl} \text{(a)} & [s^3]: & 1 = C \\ \text{(b)} & [s^2]: & -3 = D - 2C \\ \text{(c)} & [s^1]: & 6 = A + 2C - 2D \\ \text{(d)} & [s^0]: & -4 = B + 2D \end{array} \quad \text{som gjev} \quad \begin{array}{ll} C = 1 & \\ D = 2C - 3 = -1 & \text{frå (a)} \\ A = 6 + 2D - 2C = 2 & \text{frå (b)} \\ B = -4 - 2D = -2 & \text{frå (c)} \end{array}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s - 2}{(s^2 - 2s + 2)^2} + \frac{(s - 1)}{s^2 - 2s + 2} \\ &= 2\frac{s - 1}{((s - 1)^2 + 1)^2} + \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Frå formel 11 og 12 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig har me

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\cos\omega t\} &= \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\{e^{at}\sin\omega t\} &= \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Ved å utnytta dette og formelen for produkt av sinus og cosinus i Rottmann får me

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 1}{((s - 1)^2 + 1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1} \cdot \frac{1}{(s - 1)^2 + 1}\right\} \\ &= e^t\cos t * e^t \sin t \\ &= \int_0^t e^\tau \cos\tau \cdot e^{t-\tau}\sin(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{e^t}{2}\int_0^t (\sin(t - 2\tau) + \sin t)d\tau \\ &= \frac{e^t}{2}\{\left[-\frac{1}{2}\cos(t - 2\tau)\right]_0^t + t\sin t\} \\ &= \frac{1}{2}te^t \sin t. \end{aligned}$$

I den første overgangen er det brukt konvolusjonsregelen. Me står til slutt igjen med

$$f(t) = e^t(t\sin t + \cos t).$$

$\boxed{\text{5.7.05}}$ Me skal løysa initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1' + y_2 &= 2\cos t, \quad y_1(0) = 0 \\ y_1 + y_2' &= 0, \quad y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Me set $\mathcal{L}\{y_1\} = Y_1$ og $\mathcal{L}\{y_2\} = Y_2$. Ved å nytta derivasjonsformelen $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ og formel 7 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig får me

$$\begin{aligned} sY_1 + Y_2 &= \frac{2s}{s^2+1}, \\ Y_1 + sY_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminasjon av Y_1 ($Y_1 = 1 - sY_2$ frå andre likning innsett i første likning) gjev

$$Y_2 = \frac{-2s}{(s^2+1)(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1}.$$

Delbrøkoppspaltar så på følgjande måte

$$\frac{-2s}{(s^2+1)(s^2-1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2-1}.$$

For å bestemma A, B, C og D multipliserer me med fellesnemnaren $(s^2+1)(s^2-1)$ og samanliknar koeffisientane til s^n på begge sider av likskapsteiknet.

$$\begin{aligned} -2s &= (As+B)(s^2-1) + (Cs+D)(s^2+1) \\ &= A(s^3-s) + B(s^2-1) + C(s^3+s) + D(s^2+1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & [s^3]: & 0 = A + C \\ \text{(b)} & [s^2]: & 0 = B + D \\ \text{(c)} & [s^1]: & -2 = -A + C \\ \text{(d)} & [s^0]: & 0 = -B + D \end{array} \quad \text{som gjev} \quad \begin{array}{ll} -A = C = -1 & \text{frå (c)} \\ -B = D = 0 & \text{frå (d)} \\ -2 = 2C & \text{frå (a)} \\ 0 = 2D & \text{frå (b)} \end{array}$$

Dermed blir

$$Y_2 = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2-1} + \frac{s}{s^2-1} = \frac{s}{s^2+1},$$

som ved formel 7 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig gjev

$$y_2(t) = \cos t.$$

Innsetjing av uttrykket for Y_2 i formelen $sY_1 + Y_2 = \frac{2s}{s^2+1}$ gjev

$$\begin{aligned} sY_1 + \frac{s}{s^2+1} &= \frac{2s}{s^2+1} \\ Y_1 &= \frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Me står dermed igjen med (formel 8 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig)

$$y_1(t) = \sin t.$$

10.4.11 Vi har at f er en 2π-periodisk funksjon gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} k & , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Ettersom f er en like funksjon, har den en Fouriercosinusrekke med koeffisienter gitt av Eulerformlene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2k}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) \\ &= \frac{2k}{n\pi}\begin{cases} (-1)^{m+1} & , n = 2m-1 \quad m \in \mathbb{N} \\ 0 & , n = 2m \quad m \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Dermed har vi:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$$

Se også figur 1.

10.4.17 Vi skal vise at

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \frac{\pi}{4}$$

Summen kan skrives som $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, og fra oppgave 10.4.11 har vi da at:

$$k = f(0) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\underbrace{\cos 0}_{=1}$$

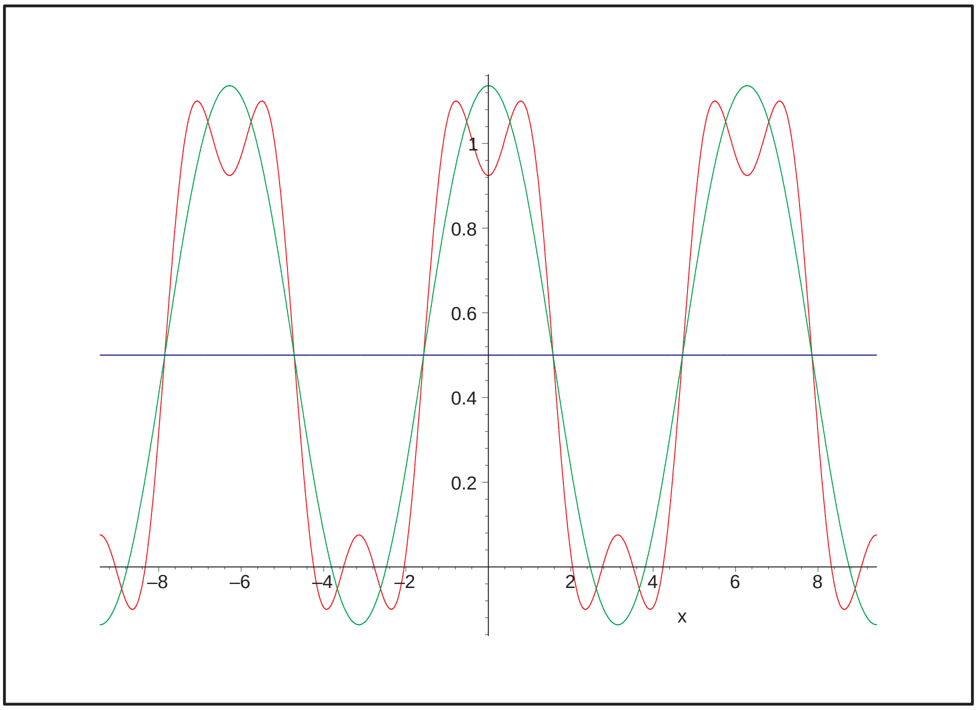
Dermed har vi at

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

Slik at vi oppnår resultatet

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

hvilket skulle bevises. Dette er for øvrig et meget berømt resultat!



Figur 1: En vakker, liten graf

$\boxed{\text{11.3.02}}$

$$L = \pi, \quad c^2 = 1, \quad u_t(x,0) = 0$$
$$u(x,0) = f(x) = 10^{-2}\sin(3x)$$

Vha. formel (12) s. 591 i Kreyszig får vi:

$$u(x,t) = 10^{-2}\cos(3t)\sin(3x)$$

$\boxed{\text{11.3.17}}$ Vi skal bruke metoden med separasjon av variable (produktmetoden) til å finne løsninger av den partielle differensialligningen $u_{xy} - u = 0$.

Vi setter $u(x,y) = F(x)G(y)$ inn i differensialligningen $u_{xy} = u$, får

$$F'(x)G'(y) = F(x)G(y) \quad \text{og omformer til} \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G(y)}{G'(y)}.$$

Her avhenger venstresiden bare av x og høyresiden bare av y. Følgelig må uttrykket være konstant, $F'(x)/F(x) = G(y)/G'(y) = k$. Det gir to ordinære differensialligninger

$$F'(x) - kF(x) = 0 \qquad \text{og} \qquad kG'(y) - G(y) = 0$$

som begge er linecære. Differensialligningen $y' + ay = 0$ har generell løsning $y = Ce^{-ax}$. Følgelig får vi her

$$F(x) = C_1 e^{kx} \qquad \text{og} \qquad G(y) = C_2 e^{y/k}.$$

Løsningene av $u_{xy} - u = 0$ av formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ blir dermed

$$u(x,y) = C_1 e^{kx} \cdot C_2 e^{y/k} = Ce^{kx+y/k}$$

der $C = C_1 \cdot C_2$ og $k \neq 0$ er vilkårlige konstanter.

11.5.03 Vi skal finne temperaturen $u(x,t)$ i en sølvstav (lengde $L = 10$ cm og termodiffusjonskoeffisient $c^2 = K/(\sigma\rho) = 1,04/(0,056 \cdot 10,6)\text{cm}^2/\text{s} = 1.752\ \text{cm}^2/\text{s}$) som er varmeisolert unntatt i endeflatene som holdes på 0 °C og med initial temperatur gitt ved funksjonen $\sin \omega x$, der $\omega = 0,1\pi\ \text{cm}^{-1}$.

Vi søker altså løsningen av den 1-dimensjonale varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(10\text{cm},t) = 0 \qquad \text{for } t \geq 0, \tag{2}$$

og intialbetingelse

$$u(x,0) = \sin \omega x \qquad 0 \leq x \leq 10\text{cm}. \tag{3}$$

Fra Kreyszig 11.5 (formel (10)) vet vi at

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega x\ e^{-(cn\omega)^2 t}$$

er en (formell) løsning av (1) som oppfyller (2).

Vi bestemmer B_n for $n = 1, 2, 3, \ldots$ slik at (3) også blir oppfylt:

$$\sin \omega x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega x$$

gir oss at

$$B_1 = 1 \text{ og } B_n = 0 \quad \text{for } n \geq 2.$$

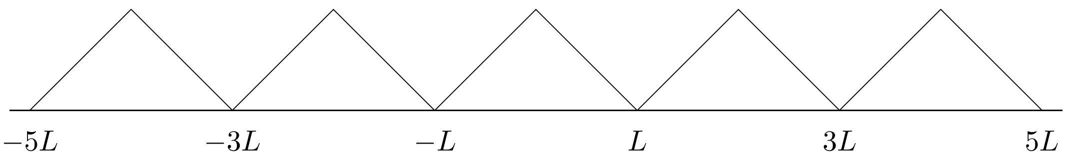
Løsningen blir altså

$$u(x,t) = \sin \omega x\, e^{-(c\omega)^2 t}.$$

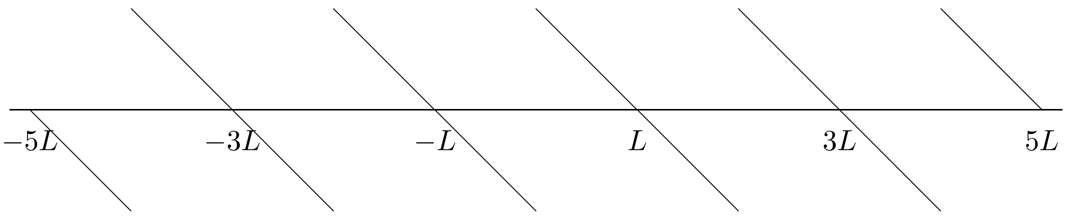
Her er altså $\omega \approx 0,314\text{cm}^{-1}$, $(c\omega)^2 \approx 0,1729\ \text{s}^{-1}$ og $u(x,t)$ er temperaturen målt i °C.

SIF5013 mai 99 /oppgave 1 **a)**

Likeutvidelsen



Oddeutvidelsen



Vi setter

frekvensen $\omega = \frac{\pi}{L}$. Koeffisientene er da gitt ved formlene:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\omega x)dx.$$

Det første integralet er arealet av en trekant, og det andre integralet kan vi regne ut ved delvis integrasjon. Dette gir:

$$a_0 = \frac{L}{2}, \qquad a_n = \frac{2}{L}\frac{1}{n^2\omega^2}(1-(-1)^n).$$

Altså er

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n \text{ odde}} \frac{\cos(n\omega x)}{n^2}, \qquad \omega = \frac{\pi}{L}.$$

b) Sett

$$R = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} -$$

Vi har at

$$\cos(n\frac{\pi}{4}) = \begin{cases} 0 \quad \text{for} \quad n = 8k, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{for} \quad n = 8k+1 \quad \text{eller} \quad n = 8k-1, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{for} \quad n = 8k+3 \quad \text{eller} \quad n = 8k-3, \\ -1 \quad \text{for} \quad n = 8k+4. \end{cases}$$

Altså er

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}R = \sum_{n \text{ odde}} \frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{n^2}.$$

Dermed ser vi at

$$f(\frac{L}{4}) = \frac{3L}{4} = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\frac{1}{2}\sqrt{2}R,$$

og følgelig

$$R = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

c) Vi får ligningen

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = k$$

Setter vi inn randbetingelsene ser vi at $X_n(x) = \cos(n\omega x)$ for $\omega = \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, \cdots$, og følgelig er $k = -n^2\omega^2$. Dermed må $T_n(t)$ oppfylle ligningen $T_n' = -n^2\omega^2 T_n$ som gir $T_n = A_n e^{-n^2\omega^2 t}$.

d) Den generelle løsningen er:

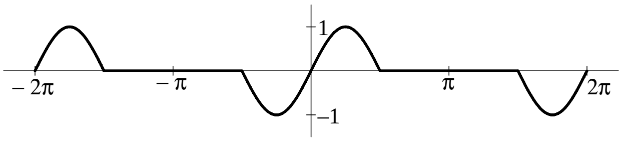
$$u(x,t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\omega^2 t}\cos(n\omega x).$$

Ved å sette $t = 0$ kan vi bestemme A_n-ene slik at vi også får oppfylt initialkravene. Vi får:

i) $u(x,t) = 4 + 2e^{-9\omega^2} t\cos(3\omega x)$.

i) $u(x,t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\text{odde}} \frac{1}{n^2} e^{-n^2\omega^2 t}\cos(n\omega x)$.

SIF5013 mai 01 /oppgave 3 **a)**



$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}$$

For $n \neq 2$ er

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 2m \quad \text{og} \quad b_n = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} \quad \text{for } n = 2m+1$$

siden $\sin(2m\cdot\pi/2) = 0$ og $\sin[(2m+1)\pi/2] = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$.

Fourierrekka til $f(x)$ er en sinusrekke, og $f(x)$ er kontinuerlig for alle x. Altså har vi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n-2)(n+2)}\sin nx \\ &= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)}\sin(2m+1)x \qquad \text{for alle } x. \end{aligned}$$

b) For $x = \pi/2$ er $f(x) = 0$ og $\sin(2m+1)x = (-1)^m$. Det gir

$$0 = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+3)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+3)} = \frac{1}{(-1)\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots = 0.$$

For å finne summen av den andre rekka, kan vi bruke Parsevals identitet:

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)}\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2(2m+3)^2} = \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)\Big/\frac{16}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{64}$$