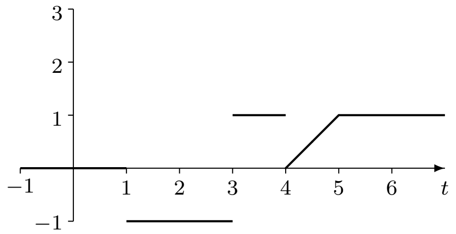
# TMA4130/35 MATEMATIKK 4N/D

Midtsemesterprøve 16. oktober 2004

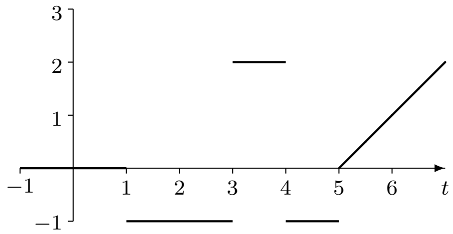
*Løsningsforslag*

**Oppgave 1** La $r(t) = -u(t-1) + 2u(t-3) - u(t-4) + (t-4)u(t-5)$, der $u(t)$ er trinnfunksjonen (også kalt Heavisidefunksjonen eller “unit step function”). Hvilken av de følgende figurene viser grafen til $r(t)$?

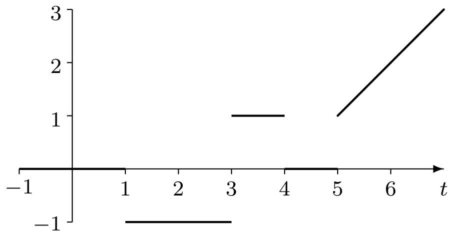
**A:**



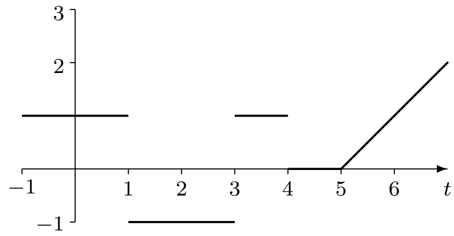

**B:**




**C:**




**D:**




Riktig svaralternativ er **C**.

**Oppgave 2** Gitt initialverdiproblemet $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Den Laplacetransformerte $Y(s)$ av løsningen $y(t)$ er:

$\boxed{\textbf{A:}\quad Y(s) = \dfrac{s+1}{s^2+1}}$ **B:** $Y(s) = \dfrac{1}{s^2}$ **C:** $Y(s) = \dfrac{s}{s^2+2}$ **D:** $Y(s) = \dfrac{s^2}{s+1}$

Riktig svaralternativ er **A**.

**Oppgave 3** Den Laplacetransformerte til funksjonen $tu(t-1)$ er:

**A:** $\dfrac{1}{s}e^{-s}$ **B:** $\dfrac{1}{s^2}e^{-s}$ **C:** $\dfrac{1-s}{s^2}e^{-s}$ $\boxed{\textbf{D:}\quad \dfrac{1+s}{s^2}e^{-s}}$

Funksjonen kan skrives som $f(t) = (1+(t-1))u(t-1)$. Det er altså funksjonen $1+t$ som er skiftet en enhet til høyre. Siden $\mathcal{L}(1+t)(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2}$ får vi fra andre skifteteorem at $\mathcal{L}(f)(s) = e^{-s}\left(\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2}\right)$. Riktig svaralternativ er **D**.

**Oppgave 4** Løsningen til integralligningen $y(t) = t - \int_0^t y(\tau)(t-\tau)d\tau$ er:

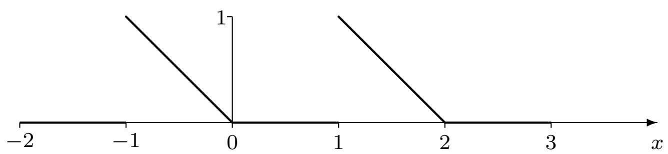
**A:** $\cos t$ **B:** $e^{-t}$ $\boxed{\textbf{C:}\ \sin t}$ **D:** $\cos t + e^{-t}$

Ligningen kan skrives som $y(t) = t - y(t) * t$ hvor '$*$' er konvolusjonsproduktet. Ved bruk av konvolusjonsteoremet, (Teorem 1 s. 279) får vi at den transformerte ligningen er $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{Y(s)}{s^2}$, $Y(s)(\frac{s^2+1}{s^2}) = \frac{1}{s^2}$ og da $Y = \frac{1}{s^2+1}$. Løsningen er

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t.$$

Riktig svaralternativ er **C**.

**Oppgave 5** La $f(x)$ være en funksjon med periode 2, og med graf som vist på figuren:




I punktet $x = 1$ konvergerer denne funksjonens Fourierrekke mot verdien:

**A:** 0 $\boxed{\textbf{B:}\ \frac{1}{2}}$ **C:** 1 **D:** $-2$

Funksjonen er stykkevis kontinuerlig og den har både høyre og venstre deriverte overalt. Derfor konvergerer Fourierrekken mot $\dfrac{1}{2}(f(1-0) + f(1+0)) = \dfrac{1}{2}$. Riktig svaralternativ er **B**.

**Oppgave 6** En odde, periodisk funksjon $f$, med periode 2 er definert som

$$f(x) = x(1-x) \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 1.$$

Funksjonsverdien $f(11{,}3)$ er:

**A:** $-116{,}39$ **B:** $-0{,}39$ **C:** $0{,}21$ $\boxed{\textbf{D:}\ -0{,}21}$

Vi har $f(11{,}3) = f(1{,}3) = -f(-1{,}3) = -f(0{,}7) = -0{,}7 \cdot 0{,}3 = -0{,}21$. Riktig svaralternativ er **D**.

**Oppgave 7** Fourierrekken til funksjonen $f(x)$ definert i oppgave 6 er

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x).$$

Fourierkoeffisienten $a_0$ er:

**A:** $\frac{1}{6}$ **B:** $\frac{1}{3\pi}$ $\boxed{\textbf{C:}\ 0}$ **D:** $\frac{\pi}{6}$

Funksjonen er odde, så $a_n = 0$ for alle $n$. Riktig svaralternativ er **C**.

**Oppgave 8** Hvilket av alternativene er løsning av $u_x + u_y = 0$ ?

**A:** $u(x, y) = Ce^{k(x+y)}$ **B:** $u(x, y) = C \sin kx\ e^{-ky}$

**C:** $u(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky$ $\boxed{\textbf{D:}\ u(x, y) = C\ \frac{e^{kx}}{e^{ky}}}$

Vi bruker metoden med separasjon av variablene og skriver $u(x, y) = F(x)G(y)$. Ved innsetting får vi

$$\begin{aligned} F'\ G + F\ G' &= 0, \qquad \text{som ved divisjon med } FG \text{ gir} \\ \frac{F'}{F} + \frac{G'}{G} &= 0, \qquad \text{som igjen gir} \\ \frac{F'}{F} = -\frac{G'}{G} &= k. \end{aligned}$$

De ordinære differensialligningene $F' - kF = 0$ og $G' + kG = 0$ har respektive løsninger, $F = C_1 e^{kx}$ og $G = C_2 e^{-ky}$, og dermed er

$$u(x, y) = C\ e^{kx} e^{-ky} = C\ e^{k(x-y)} = C\ \frac{e^{kx}}{e^{ky}}.$$

Riktig svaralternativ er **D**.

**Oppgave 9** La $f(x)$ være den $2\pi$-periodiske funksjonen gitt ved

$$f(x) = x(\pi - |x|) \quad \text{for} \quad -\pi < x \le \pi.$$

Det oppgis at Fourierrekken til $f(x)$ er $\displaystyle \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$ .

Summen av rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ er:

**A:** $\dfrac{\pi^5}{316}$ **B:** $\dfrac{\pi^4}{100}$ **C:** $\dfrac{\pi^2}{10}$ $\boxed{\textbf{D:}\ \dfrac{\pi^3}{32}}$

Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig overalt (og deriverbar), så Fourierrekken konvergerer til $f(x)$ for alle $x$ (Teorem 1 i avsnitt 10.2 av Kreyszig). Sett inn $x = \pi/2$ og bruk at

$$\sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1}$$

for å finne at rett svaralternativ er **D**.

**Oppgave 10** La funksjonen $f(x)$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for} \quad |x| \le 1, \\ 0 & \text{for} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Bruk Fourier-integralet til $f(x)$ til å finne verdien av integralet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos w - \cos^2 w}{w^2}\, dw.$

Svaret er:

**A:** $\dfrac{\pi}{2}$ **B:** $-1000$ $\boxed{\textbf{C:}\ 0}$ **D:** $1$

Fourierintegralet (se formler side 559 i Kreyszig) er

$$\int_0^\infty (A(w)\cos wx + B(w)\sin wx)\, dw$$

Siden $f(x)$ er en likefunksjon er $B(w) = 0$, og $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos wx dx$. Delvisintegrasjon viser at $A(w) = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos w}{w^2}$. Fra Teorem 1 i avsnitt 10.8 vet vi at

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2}\cos wx dw$$

Sett $x = 1$ for å finne at rett svaralternativ er **C**.