# Praktisk løsning av enkle differensialligninger

I dette lille notatet skal vi se hvordan vi kan løse den generelle inhomogene lineære første ordens differensialligningen, samt andreordens ligninger med konstante koeffisienter.

Den generelle første ordens *homogene* ligningen er en ligning av formen

$$y' + a(x)y = 0. \tag{1}$$

En løsning av (1) er $y_1 = e^{-A(x)}$, der $A(x) = \int_0^x a(u)du$.[1] Enhver annen løsning av (1) er av formen $cy_1$ for en eller annen konstant $c$.

For å løse den inhomogene ligningen

$$y' + a(x)y = q(x). \tag{2}$$

multipliserer vi hele ligningen med den *integrerende faktoren* $e^{A(x)}$ (merk fortegnet). Da får vi ligningen

$$e^{A(x)}y' + e^{A(x)}a(x)y = e^{A(x)}q(x). \tag{3}$$

Venstresiden skrives som $(e^{A(x)}y)'$, og følgelig blir $e^{A(x)}y = \int_0^x e^{A(u)}q(u)du + c$, der $c$ er en vilkårlig konstant. Den generelle løsningen av (2) er altså

$$y = e^{-A(x)}\left(\int_0^x e^{A(u)}q(u)du + c\right). \tag{4}$$

**Eksempel 1** Den generelle løsningen av ligningen $y' + \frac{2}{\sqrt{x}}y = e^{-4\sqrt{x}}$, finner vi ved først å finne en antiderivert til $a(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Vi kan velge $A(x) = 4\sqrt{x}$, og vi finner

$$y = e^{-4\sqrt{x}}\left(\int_0^x e^{4\sqrt{u}}e^{-4\sqrt{u}}du + c\right) = (x+c)e^{-4\sqrt{x}}.$$

Den generelle andre ordens *homogene* differensialligningen med konstante koeffisienter er

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{5}$$

Velger man $y = e^{\lambda x}$, og setter dette inn i ligning (5), ser vi at $y$ er en løsning av (5) hvis og bare hvis $\lambda$ tilfredsstiller *den karakteristiske ligningen*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{6}$$

Avhengig av verdiene av $a$ og $b$, eller rettere sagt verdien av *diskriminanten* $d = a^2 - 4b$, får vi forskjellige tilfeller.

Tilfelle 1. $d > 0$, to forskjellige reelle røtter $\lambda = \lambda_1$ og $\lambda = \lambda_2$.

Tilfelle 2. $d < 0$, to komplekskonjungerte røtter $\lambda = \mu \pm i\omega$.

Tilfelle 3. $d = 0$, to sammenfallende røtter $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$.

[1] Nedre grense behøver ikke å være 0, men det må være et tall som gir integralet mening.

I de forskjellige tilfellene blir den generelle løsningen

Tilfelle 1. $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{d})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{d})$.

Tilfelle 2. $y(x) = e^{\mu x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$, $\mu = -\frac{a}{2}$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$.

Tilfelle .3 $y(x) = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$.

**Eksempel 2** Vi ønsker å løse den homogene ligningen $y'' - y' = 0$, med initial-betingelser $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.
Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 - 1 = 0$, så dette er tilfelle (3). Vi har $\lambda = \pm 1$, så den generelle løsningen er $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Den deriverte er $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$. Innsetting gir $y(0) = c_1 + c_2 = 0$ og $y(0) = c_1 - c_2 = 1$. Vi finner at $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$.

Den generelle andre ordens *inhomogene* differensialligningen med konstante koeffisienter er

$$y'' + ay' + by = q(x). \tag{7}$$

For å løse denne ser vi litt nærmere på $q(x)$. Vi sier at høyresiden $q(x)$ er *spesiell*, dersom den er av formen $q(x) = x^n e^{\lambda}$ eller $q(x) = x^n e^{\mu}(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$. Dersom høyresiden er spesiell kan vi prøve med en løsning av samme type, $y(x) = Ax^m e^{\lambda}$ eller $y(x) = x^m e^{\mu}(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$, hvor $m = n, n{+}1$ eller $n{+}2$ avhengig av om $\lambda$ eller $\mu{+}i\omega$ er rot i den karakteristiske ligningen eller ikke. Vi må øke verdien av $n$ med multiplisiteten av roten. Det er enklest å forklare dette med noen eksempler.

**Eksempel 3** Vi ønsker å løse den inhomogene ligningen $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Vi er i tilfelle (1), $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Siden 2 er en rot i den karakteristiske ligningen setter $y_1 = Axe^{2x}$ og finner $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = Ae^{2x}$. Den generelle løsningen er derfor $y(x) = c_1 e^x + (x + c_2)e^{2x}$

**Eksempel 4** Vi ønsker å løse den inhomogene ligningen $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$.

Vi er i tilfelle (3), $\lambda = -1$ er en dobbelrot og høyresiden er spesiell. Vi setter $y_1 = Ax^3 e^{-x}$ og finner $y_1'' + 2y_1' + y_1 = 6Axe^{-x}$. Den generelle løsningen er derfor $y(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + c_1 + c_2 x\right) e^{-x}$.

**Eksempel 5** Vi ønsker å løse den inhomogene ligningen $y'' + y = x \sin x$.

Vi er i tilfelle (2), $\lambda = i$ er en rot og høyresiden er spesiell. Vi setter $y_1 = x^2(A \cos x + B \sin x)$ og finner $y_1'' + y_1 = (4Bx + 2A) \cos x + (-4Ax + 2B) \sin x$. Altså må vi sette $A = -\frac{1}{4}$ og $B = 0$. Setter vi så $y_2 = x(C \cos x + D \sin x)$, får vi $y_2'' + y_2 = 2D \cos x - 2C \sin x$. For at $y = y_1 + y_2$ skal være en l(ø)sning må vi ha $C = 0$ og $D = \frac{1}{4}$. Den generelle løsningen er derfor $y(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + c_1\right) \cos x + \left(\frac{1}{4}x + c_2\right) \sin x$.

For å løse en ligning av formen

$$y'' + ay' + by = q(x) \tag{8}$$

hvor $q$ ikke nødvendigvis er spesiell, kan vi benytte oss av *metoden med variasjon av koeffisientene*.
Vi antar at løsningen er av formen $y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, der $y_1$ og $y_2$ er lineært uavhengige løsninger av den homogene ligningen. Det viser seg da at denne $y$-en er en løsning dersom $u_1$ og $u_2$ er funksjoner som tilfredsstiller ligningene

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \qquad \text{og} \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= q. \end{aligned}$$

Dette systemet har løsningen $u_1' = -\frac{y_2 q}{W(y_1,y_2)}$, og $u_2' = \frac{y_1 q}{W(y_1,y_2)}$, der er $W(y_1, y_2)$ er Wronskideterminanten

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

**Eksempel 6** Vi ønsker å løse den inhomogene ligningen $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Vi har $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, og $W(y_1, y_2) = e^{2x}$. Dermed får vi ligningene $u_1' = -1$ og $u_2' = \frac{1}{x}$, og etter litt regning finner vi at den generelle løsningen er $y(x) = (x \ln x + c_1 + c_2 x)\, e^x$.