

Notat om RK4

høst 2005

Arne Morten Kvarving

22. november 2005

Etter forespørsel fra studass skal jeg her gjennomgå en oppgave der vi skal bruke RK4 til å finne en numerisk tilnærming til løsningen av et system av differensialligninger.

Vi skal se på problemet gitt ved

$$y'' = (t+1)y^2, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \quad (1)$$

Steglengden setter vi til $h = 0.1$. Legg merke til at jeg bruker t som uavhengig variable mens i Kreyzig brukes x . Navngivning har jo ikke noe å si, men husk når du sammenligner med Kreyzig. Siden dette er en andre ordens differensialligning, bruker vi standardmetoden og skriver det som et system av to ligninger istedet. Dette er gitt ved

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= (t+1)y^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Dette betyr at $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} z \\ (t+1)y^2 \end{pmatrix}$. Med referanse til ligning 6b i Kreyzig, side 958 så finner vi

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) = h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Husk at $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$. Videre finner vi

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(t_0 + h/2, \mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_1/2) = h \begin{pmatrix} 1 + 0.1/2 \\ (1 + 0.1/2)(1 + 0.1/2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.105 \\ 0.116 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(t_0 + h/2, \mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_2/2) = h \begin{pmatrix} 1 + 0.116/2 \\ (1 + 0.1/2)(1 + 0.105/2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.116 \end{pmatrix}.$$

Siste tangentverdi blir

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_3) = h \begin{pmatrix} 1 + 0.116 \\ (1 + 0.1)(1 + 0.106)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.112 \\ 0.135 \end{pmatrix}.$$

Vi har nå funnet alle tangenter vi skal bruke slik at vi kan finne løsningen som

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_0 + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0.105 \\ 0.116 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.116 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.112 \\ 0.135 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.106 \\ 1.117 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$