



Faglig kontakt under eksamen:

Finn Knudsen tlf. 73 59 35 23

Anne Kværnø tlf. 73 59 35 42

Sigmund Selberg tlf. 73 55 02 84

## EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål

Onsdag 30. november 2005

kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 21. desember 2005.

*Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

**Oppgave 1** Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdi-problemet

$$y' + y + \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau} d\tau = u(t-1) \quad \text{for } t > 0, \quad y(0) = 1.$$

**Oppgave 2** La  $f$  være den  $2\pi$ -periodiske funksjonen gitt ved  $f(x) = x^4$  for  $-\pi < x \leq \pi$ . Det oppgis at  $f$  har Fourierrekke

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos nx$$

Bruk dette til å finne summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^4} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^4 n^4 - 12\pi^2 n^2 + 36}{n^8}$$

**Oppgave 3**

a) Finn alle løsninger på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  av differensialligningen

$$(1) \quad u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0,$$

med randbetingelser

$$(2) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

b) Finn  $u(x, t)$  som oppfyller (1) og (2) samt initialbetingelsene

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{og} \quad u_t(x, 0) = \sin 4x.$$

**Oppgave 4** Finn den Fouriertransformerte  $\hat{f}(w)$  av funksjonen

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{for } -\infty < x < \infty.$$

Bruk resultatet til å vise at

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2e}.$$

**Oppgave 5**

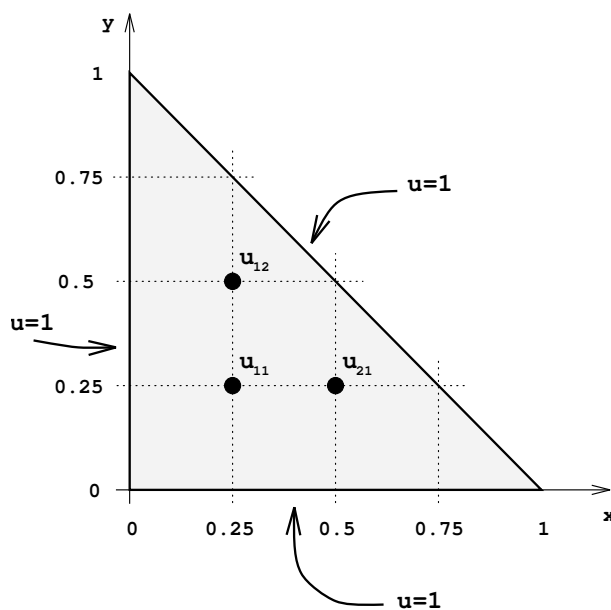
Gitt Poisson-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = -1$$

i et område  $R$ , gitt ved

$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1-x\},$$

og med  $u(x, y) = 1$  på randen av  $R$ , se figuren til høyre.



La  $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ , med  $x_i = ih$  og  $y_j = jh$ .

Bruk skritt lengde  $h = 0.25$  i både  $x$ - og  $y$ -retning og sett opp differanseligningene for  $u_{ij}$  i hvert av de indre punktene.

Finn  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  og  $u_{21}$ .

**Oppgave 6** Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x_1 - 16x_2 + 4x_3 &= 2 \\ -x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Kan dette systemet løses ved bruk av Jacobi-iterasjoner? Begrunn svaret.

Hvis ja: Utfør én Jacobi-iterasjon, med startverdiene  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$ .

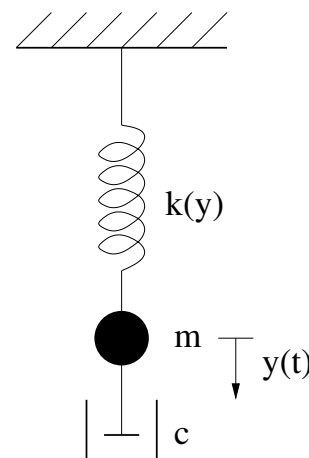
Hvis nei: Skriv om systemet slik at Jacobi-iterasjonene kan utføres. Utfør deretter én iterasjon, med startverdiene  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$ .

**Oppgave 7**

Denne oppgaven tar for seg en mekanisk svingekrets, der fjær-koeffisienten  $k$  avhenger av hvor mye fjæren strekkes eller klemmes sammen.

Med  $m = 1$ ,  $c = 0.5$  og  $k(y) = 2 + y^2$  vil bevegelsen av kula i svingekretsen til høyre beskrives av ligningen

$$y'' + 0.5y' + 2y + y^3 = 0.$$



Skriv ligningen om til et system av første ordens ordinære differensialligninger.

La  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  og bruk Heuns metode med skrittlengde  $h = 0.1$  til å finne tilnærmelser til  $y(0.1)$  og  $y(0.2)$ .

**Oppgave 8** La  $f$  være funksjonen gitt ved  $f(x, y, z) = 2xyz(e^x + e^y - e^z)$ , og la  $\mathbf{v}$  være en vektor som står vinkelrett både på  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$  og  $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$  og som har negativ  $\mathbf{k}$ -komponent. Finn den retningsderiverte av  $f$  i punktet  $P : (1, -1, -1)$  i retningen til vektoren  $\mathbf{v}$ .

## Formler i numerikk

- La  $p(x)$  være et polynom av grad  $\leq n$  som interpolerer  $f(x)$  i punktene  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Forutsatt at  $x$  og alle nodene ligger i intervallet  $[a, b]$ , så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left( \frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - \frac{1}{2}hf''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) + \frac{1}{2}hf''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12}h^2f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$

Se også formlene i Rottmann.

**Tabell over Laplacetransformerte**

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$ ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$