Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen tlf. 73 59 35 23

EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål
Onsdag 9. august 2006
kl. 15–19

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 30. august 2006.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La $y(t)$ være løsningen av initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} &y'' + 4y' + 4y = f(t) \quad \text{for } t > 0 \\ &y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 5\sin t & \text{for } 0 < t < 2\pi, \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

Vis at da er Laplacetransformasjonen til y er

$$Y(s) = G(s)(1 - e^{-2\pi s}) \quad \text{der} \quad G(s) = \frac{3-4s}{5(s^2+1)} + \frac{4}{5(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Finn $y(2\pi)$.

Oppgave 2

a) Finn alle funksjoner $u(x,t) = F(x)G(t)$ slik at

(1) $$t^3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for} \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

og

(2) $$u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \quad \text{for} \quad t > 0.$$

b) Finn en funksjon $u(x,t)$ som tilfredstiller (1), (2) og

$$u(x,1) = 4 \sin x + \sin 4x.$$

Oppgave 3

a) Finn den Fouriertransformerte $\hat{u}(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ixw} dx$ til den generelle løsningen $u(x,t)$ av den partielle differensialligningen

(3) $$u_t = u_{xx} - u,$$

som tilfredsstiller randbetingelsene

(4) $$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_{xx}(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_t(x,t) = 0 \qquad \text{for alle } t \geq 0.$$

b) Bestem tilslutt den løsningen $u(x,t)$ av ligning (3) som tilfredsstiller (4), og initialbetingelsen

$$u(x,0) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Oppgave 4 La f være funksjonen gitt ved $f(x,y,z) = 2xyz(e^x + e^y - e^z)$, og la $\mathbf{v}$ være en vektor som står vinkelrett både på $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ og som har negativ $\mathbf{k}$-komponent. Finn den retningsderiverte av f i punktet $P : (1, -1, -1)$ i retningen til vektoren $\mathbf{v}$.

Oppgave 5 Gitt integralet

$$I = \int_1^2 e^{2x} dx$$

Finn en tilnærmelse S til integralet I ved bruk av Simpsons metode, med skrittlengde $h = 0.25$.

Finn en øvre grense for feilen $|I - S|$.

Simpsons metode med skrittlengde $h = 0.5$ vil gi tilnærmelsen 23.721559. Bruk dette til å finne en tilnærmelse til feilen $I - S$.

Oppgave 6 Vi skal løse diffusjonsligningen med et kildeledd, gitt ved

$$u_t = u_{xx} + x, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t \ge 0,$$

med randbetingelsene

$$u(0,t) = 1, \qquad u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0$$

og startbetingelsen

$$u(x,0) = 1 - x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

La h være skrittlengden i x-retningen og k i t-retningen, og formuler en eksplisitt metode som gir tilnærmelse til løsningen $u(x,t)$ i punktene (x_i, t_j) der $x_i = ih$ og $t_j = jk$.

La $h = 0.25$, $k = 0.01$, og bruk metoden til å finne tilnærmelser til $u(0.25, 0.01)$, $u(0.5, 0.01)$ og $u(0.75, 0.01)$.