LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4135 MATEMATIKK 4D, 09.08.2006

Oppgave 1 Ved bruk av Laplacetransformasjonen svarer differensialligningen med initialbetingelsene til den lineære ligningen

$$s^2Y + 4sY + 4Y = F(s)$$

som gir

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s+2)^2}.$$

Ved hjelp av enhets trappefunksjonen kan vi skrive

$$f(t) = 5\sin t - 5\sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$$

og dermed blir

$$F(s) = \frac{5}{s^2+1} - \frac{5}{s^2+1}e^{-2\pi s} = \frac{5}{s^2+1}(1-e^{-2\pi s}).$$

Setter vi $Y(s) = G(s)(1-e^{-2\pi s})$, ser vi at

$$G(s) = \frac{5}{(s^2+1)(s+2)^2} = \frac{1}{5}\frac{3-4s}{(s^2+1)} + \frac{1}{5}\frac{4}{(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Inverse Laplacetransformasjon gir

$$g(t) = \frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t + \frac{4}{5}e^{-2t} + te^{-2t}$$

og

$$y(t) = g(t) - g(t-2\pi)u(t-2\pi),$$

slik at

$$y(2\pi) = g(2\pi) - g(0) = \left(2\pi + \frac{4}{5}\right)e^{-4\pi} - \frac{4}{5}.$$

Oppgave 2 Setter vi $u = FG$ inn i ligning (1) får vi $t^3G'F = F''G$ og siden vi ikke er interessert i den trivielle løsningen får vi $\dfrac{t^3G'F}{FG} = \dfrac{F''G}{FG}$ som gir oss at $\dfrac{t^3G'}{G} = \dfrac{F''}{F} =$ konstant.

For å få oppfylt randkravene (2) må vi ha at konstanten kun kan ta verdiene $-n^2$ for $n = 1, 2, \ldots$, og dermed får vi ligningene

$$\frac{F''}{F} = -n^2 \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots.$$

For verdien $-n^2$ blir løsningen $F_n(x) = \sin nx$ opp til multiplikasjon med en vilkårlig konstant som vi tar inn i løsningen av den andre ligningen, nemlig

$$\frac{t^3 G'}{G} = -n^2 \quad \text{som kan skrives på formen} \quad \frac{dG}{G} = -n^2 \frac{dt}{t^3}.$$

Integrasjon gir oss løsningene

$$G_n(t) = B_n\, e^{\frac{n^2}{2t^2}} \quad \text{for en vilkårlig konstant } B_n.$$

Superposisjonsprinsippet forteller oss at den generelle løsningen av (1) som tilfredstiller randkravene (2), kan skrives som Fourierrekke

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{\frac{n^2}{2t^2}} \sin nx.$$

Setter vi så inn initialkravet $u(x,1) = 4\sin x + \sin 4x$ gir dette at alle B_n-ene forsvinner bortsett fra at $B_1 e^{\frac{1}{2}} = 4$ og $B_4\, e^8 = 1$. Løsningen blir

$$u(x,t) = 4e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{t^2}-1)} \sin x + e^{8(\frac{1}{t^2}-1)} \sin 4x.$$

Oppgave 3

a) Vi setter $U(w,t) = \mathcal{F}(u)(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} u(x,t)dx$.
Fouriertransformerer vi ligningen blir den transformerte

$$U_t = -w^2 U - U = -(w^2+1)U.$$

Dette er en første ordens ordinær differensialligning, og den generelle løsningen er

$$U(w,t) = A(w)e^{-(w^2+1)t}.$$

Ved å sette inn for $t = 0$ ser vi at $A(w) = U(w,0)$.

b) Initialbetingelsen gir $U(w,0) = \mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}x^2})(w) = e^{-\frac{1}{2}w^2}$. Fra punkt a) får vi derfor at

$$U(w,t) = e^{-\frac{1}{2}w^2} e^{-(w^2+1)t} = e^{-t} e^{-(t+\frac{1}{2})w^2}.$$

Den inverse Fouriertransformen gir oss

$$u(x,t) = \frac{e^{(\frac{x^2}{4t+2}-t)}}{\sqrt{2t+1}}.$$

Oppgave 4 Vi regner først ut gradienten.

$\mathrm{grad} f =$
$[2yz(e^x + e^y - e^z) + 2xyze^x]\mathbf{i} + [2xz(e^x + e^y - e^z) + 2xyze^y]\mathbf{j} + [2xy(e^x + e^y - e^z) - 2xyze^z]\mathbf{k}.$

Evaluering i punktet $P : (1, -1, -1)$ gir oss

$$\mathrm{grad} f|_P = 4e\mathbf{i} + (-2e + 2e^{-1})\mathbf{j} + (-2e - 2e^{-1})\mathbf{k}.$$

Enhetsvektoren vinkelrett både på $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ og som har negativ $\mathbf{k}$-komponent er $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Vi finner at den retningsderiverte er

$$D_{\mathbf{e}} f|_P = \frac{8e}{\sqrt{3}}.$$

Oppgave 5 Simpsons metode med $h = 0.25$ gir

$$S = \frac{0.25}{3}(e^2 + 4e^{2.5} + 2e^3 + 4e^{3.5} + e^4) = 23.612505$$

Øvre grense for feilen er gitt ved

$$|I - S| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

med $b = 2$, $a = 1$, $n = 4$ og

$$M_4 = \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = \max_{1 \leq x \leq 2} |2^4 e^{2x}| = 16e^4$$

får vi

$$|I - S| \leq \frac{16e^4}{180 \cdot 4^4} = 0.01895.$$

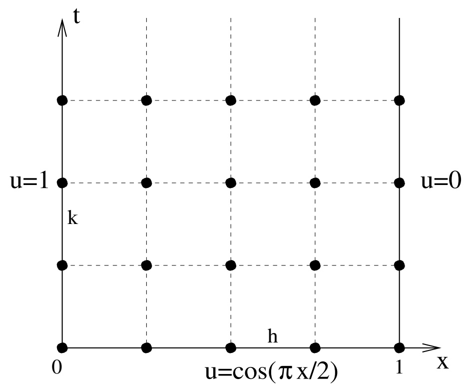
Simpsons metode med $h = 0.5$ oppgis til å gi tilnærmelsen $\tilde{S} = 23.721559$. En tilnærmelse til feilen i S er gitt ved

$$I - S = \frac{1}{15}(S - \tilde{S}) = -7.27 \cdot 10^{-3}.$$

(Til sammenligning, selv om dette ikke er en del av oppgaven, er feilen $I - S = -7.95 \cdot 10^{-3}$.)

Oppgave 6 Vi bruker følgende approksimasjoner til de deriverte i henholdsvis $t-$ og $x-$ retningen:

$$
\begin{aligned}
u_t(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} \\
u_x x(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2}
\end{aligned}
$$



Sett dette inn i differenesialligningen, og la $u_{x_i,t_j} \approx u_{i,j}$ i hvert gitterpunkt, og vi få differanseligninen

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + x_i$$

Løs dette med hensyn på $u_{i,j+1}$, sett inn rand- og startbetingelser, og vi får følgende eksplisitte metode:

La $u_{i,0} = 1 - x_i$, $i = 0, 1, \cdots, N$, med $N = 1/h$.
for $j = 0, 1, 2, 3$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + k\, x_i, \qquad i = 1, \cdots, N-1$$

$$u_{0,j+1} = 1, \qquad u_{N,j+1} = 1$$

end

Med $h = 0.25$ og $k = 0.01$ får vi at $k/h^2 = 0.16$. Startbetingelsen gir

$$u_{00} = 1.0, \quad u_{10} = 0.9239, \quad u_{20} = 0.7071, \quad u_{30} = 0.3827, \quad u_{40} = 0.0,$$

slik at

$$
\begin{aligned}
u(0.25, 0.01) \approx u_{11} &= 0.9239 + 0.16(1.0 - 2 \cdot 0.9239 + 0.7071) + +0.01 \cdot 0.25 &= 0.9039 \\
u(0.5, 0.01) \approx u_{21} &= 0.7071 + 0.16(0.9239 - 2 \cdot 0.7071 + 0.3827) + 0.01 \cdot 0.5 &= 0.6949 \\
u(0.75, 0.01) \approx u_{31} &= 0.3827 + 0.16(0.7071 - 2 \cdot 0.3827 + 0) + 0.01 \cdot 0.75 &= 0.3809.
\end{aligned}
$$