TMA4130 MATEMATIKK 4N

Midtsemesterprøve torsdag 27. okt. 2005
Kl. 17.15–18.45 (90 min.)

Hjelpemidler: Enkel kalkulator (HP30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*
NB: Sett *ett* kryss for hver oppgave på svararket. *Ikke* skriv på oppgavearket!

Oppgave 1 En periodisk funksjon f med periode 2 er definert som $f(x) = x^2$ for $-1 < x \leq 1$.

I punktet $x = 99{,}8$ konvergerer Fourierrekken til f mot verdien:

A: $0{,}16$ **B:** $-0{,}4$ **C:** $9960{,}04$ $\boxed{\textbf{D:}\ 0{,}04}$

Vi har $f(99{,}8) = f(100 - 0{,}2) = f(-0{,}2) = (-0{,}2)^2 = 0{,}04$, og svaret er **D**.

Oppgave 2 Fourierkoeffisienten a_1 for funksjonen definert i oppgave 1 er:

A: $\dfrac{1}{4\pi^2}$ $\boxed{\textbf{B:}\ -\dfrac{4}{\pi^2}}$ **C:** 0 **D:** $\dfrac{2}{\pi}$

$a_1 = \int_{-1}^{1} x^2 \cos \pi x \, dx = -\dfrac{4}{\pi^2}$. (Bruk formel nr. 124, s. 144 i Rottmann.) Svaret er derfor **B**.

Oppgave 3 En funksjon f med periode 2 er gitt ved $f(x) = x^9$ for $-1 < x \leq 1$. I punktet $x = -9$ konvergerer Fourierrekken til f mot verdien:

A: 1 **B:** 0 **C:** $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{D:}\ -1}$

Pga. periodisiteten er konvergensen i $x = -9$ den samme som i $x = 1$. Men siden f har en diskontinuitet i $x = 1$, med grenseverdi $f(1-) = 1$ og $f(1+) = -1$, får vi svaret 0, dvs. **B**.

Oppgave 4 Den Laplacetransformerte til funksjonen $t^2 u(t-1)$ er:

A: $\dfrac{e^{-s}}{s^3}$ $\boxed{\textbf{B:}\ e^{-s}\dfrac{s^2+2s+2}{s^3}}$ **C:** $e^{-s}\dfrac{s-1}{s^3}$ **D:** $e^{1-s}\dfrac{2}{s^3}$

$f(t) = (t-1+1)^2 u(t-1) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1]u(t-1)$. Derfor gir t-forskyvningsregelen (second shifting theorem) at $\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{2}\right)$. Svaret er derfor **B**.

Oppgave 5 Invers Laplacetransformert av $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}$ er

A: $u(t-\pi)\sin t$ **B:** $e^{\pi-t}\cos t$

C: $(t-\pi)u(t-\pi)\sin 2t$ $\boxed{\textbf{D:}\quad u(t-\pi)e^{\pi-t}\frac{1}{2}\sin 2t}$

Faktorisering av nevner gir:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+4}\right\} = u(t-\pi)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}(t-\pi)$$

Men

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}(t) = e^{-t}\frac{1}{2}\sin 2t,$$

så vi får til slutt:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+4}\right\} = u(t-\pi)e^{\pi-t}\frac{1}{2}\sin 2(t-\pi)$$

og siden $\sin(2t-2\pi) = \sin 2t$, er **D** riktig svar.

Oppgave 6 Løsningen $y(t)$ av initialverdiproblemet

$$y'' + y = 3\cos 2t, \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

har Laplacetransformert $Y(s)$ gitt ved:

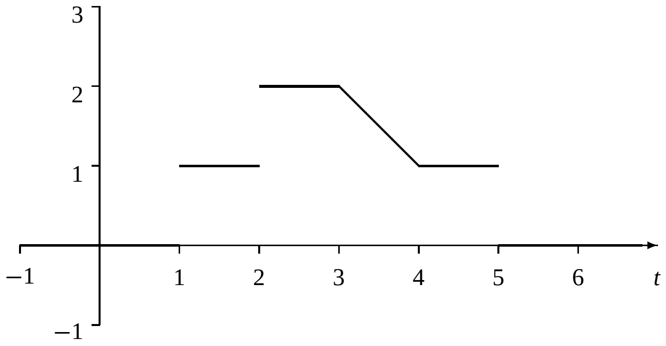
$\boxed{\textbf{A:}\quad \dfrac{3s}{(s^4+5s^2+4)}}$ **B:** $\dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+4)}$ **C:** $\dfrac{3e^{-2s}}{s^2+1}$ **D:** $\dfrac{3}{s(s^2+1)}$

Laplacetransformasjon gir

$$(s^2+1)Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4}$$

så svaret er **A**.

Oppgave 7 Funksjonen med graf



er gitt ved:

A: $u(t-1)+u(t-2)-(t-3)u(t-3)-u(t-5)$

B: $u(t-1)+u(t-2)-(t-3)u(t-3)+(t-4)u(t-4)-u(t-5)$

C: $u(t-1)+u(t-2)-(t-3)u(t-3)+tu(t-4)-u(t-5)$

D: $u(t-1)+u(t-2)-tu(t-3)+tu(t-4)-u(t-5)$

Svaret er **B**.

Oppgave 8

Konvolusjonsproduktet (se midt på s. 176 i Rottmann for definisjon) $1 * \cos t$ er lik

A: $t\cos t$ **B:** $\cos t$ $\boxed{\textbf{C:}\quad \sin t}$ **D:** te^{-t}

Svaret er **C**. Enten ved direkte utregning eller ved Laplacetranformasjon:

$$\mathcal{L}\{1 * \cos t\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

(tar nå invers Laplace).

Oppgave 9

La funksjonen $f(x)$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w)$ er gitt ved:

A: $\dfrac{\pi w}{1+w^2}$ **B:** $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{e^{iw}-1}{w}$ $\boxed{\textbf{C:} \quad \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\sin w}{w}}$ **D:** $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\cos w}{w}$

Vi har

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{iw} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin w}{w}.$$

Svaret er derfor **C**.

Oppgave 10

Verdien av integralet

$$\int_0^\infty \arctan \frac{2}{w^2}\, dw$$

er (*Hint*: Bruk at den Fouriertransformerte av $f(x) = \dfrac{e^{-|x|} \sin x}{x}$ er $\widehat{f}(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan \dfrac{2}{w^2}$.)

A: $\dfrac{\pi}{2}$ **B:** 2π $\boxed{\textbf{C:} \quad \pi}$ **D:** $\dfrac{\pi^3}{32}$

Vi bruker hintet. Merk at hvis vi definerer $f(0) = 1$, så er f kontinuerlig overalt, siden $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Vi har da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx}\, dw$$

som innsatt $x = 0$ gir

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \arctan \frac{2}{w^2}\, dw = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \arctan \frac{2}{w^2}\, dw$$

der siste likhet følger fra det faktum at $\arctan \frac{2}{w^2}$ er en like funksjon av w. Svaret er derfor **C**.