Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen (73 59 35 23)

EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål
Tirsdag 18. desember 2007
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur 17. januar 2008.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn den inverse Laplacetransformerte til hver av funksjonene

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s^2+4s+5},\\
F(s) &= e^{-2s}\frac{1}{s^3},\\
F(s) &= e^{-s}\frac{1}{s-1}.
\end{aligned}
$$

b) Vis at løsningen på initialverdiproblemet

$$y''+4y'+4y=f(t), \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1,$$

kan skrives på formen

$$y(t)=g(t)+\int_0^t f(\tau)(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}d\tau.$$

Hva blir $g(t)$?

Oppgave 2 Funksjonen $f(x)$ er definert ved at

(i) $f(x)$ er periodisk med periode 2π,

(ii) $f(x)$ er en likefunksjon,

(iii) $f(x) = \pi - x \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq \pi$.

a) Skisser grafen til $f(x)$ i intervallet $[-\pi, 3\pi]$.

b) Bestem cosinusrekka til $f(x)$, og beregn summen av rekka $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Oppgave 3 I denne oppgaven skal vi betrakte kontinuerlige funksjoner som tilfredsstiller varmeligningen

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

i området $0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty,$ og som i tillegg tilfredsstiller randbetingelsen

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0. \tag{2}$$

a) Finn alle funksjoner u av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (1) og (2).

b) Bestem funksjonen $u(x,t)$ som tilfredsstiller (1) og (2), samt initialbetingelsen

$$u(x,0) = \pi - x \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3}$$

Oppgave 4 Beregn funksjonen

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ixw} dx,$$

og evaluer intgralet

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos(\frac{1}{2}w)}{w} dw.$$

Oppgave 5 La $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^3$, og la f være funksjonen gitt ved $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. Bestem de retningsderiverte $D_{\vec{a}}(f)$ og $D_{\vec{b}}(f)$ evaluert i punktet $P : (3/2, 1/2, 1/2)$, der $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k})$, og $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{k})$.

Bestem også den enhetsvektoren $\vec{v}$ som er slik at den retningsderiverte $D_{\vec{v}}(f)$, evaluert i punktet $P : (3/2, 1/2, 1/2)$, er størst mulig.

Oppgave 6

a) Gitt problemet

$$\begin{cases} y' = 50(\cos t - y), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Finn en tilnærmelse y_1 til $y(0.1)$ ved bruk av den 4-ordens Runge-Kutta metoden

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n, y_n\right), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \end{aligned}$$

etter ett skritt med $h = 0.1$ og hvor $f(t, y) = y' = 50(\cos t - y)$.

b) Beregn $y_1 \approx y(0.1)$ ved bruk av baklenges (implisitt) Euler ett skritt ($h = 0.1$),

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}),$$

og sammenligne resultatet med den eksakte løsningen til ligning (4) som er

$$y(t) = \frac{50}{2501}\left(50\cos t + \sin t - 50\mathrm{e}^{-50t}\right).$$

Sammenlign med resultatet i **b)** og forklar det du ser.

Oppgave 7

Gitt problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (t > 0,\ 0 < x < 1) \\ u(0,t) = u(1,t) = t & (t \geq 0) \\ u(x,0) = 8x(1-x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

a) Bruk Crank-Nicolsons skjema

$$(2+2r)U_i^{j+1} - r\left(U_{i+1}^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}\right) = (2-2r)U_i^j + r\left(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j\right),$$

med $\Delta x = h = 1/4$, $\Delta t = k = 1/16$, Couranttallet $r = k/h^2 = 1$, $U_i^0 = u(ih, 0)$ og hvor $U_i^j \approx u(x_i, t_j) = u(hi, kj)$, til å finne et lineært ligningssystem for $U_i^1 \approx u(ih, k)$, $i = 1, 2, 3$.

b) La $x_0 = 3/2$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3/2$, og gjør én iterasjon med Gauss-Seidel på ligningssystemet

$$\begin{array}{rrrcl} 4x & -y & & = & 33/16, \\ -x & +4y & -z & = & 3, \\ & -y & +4z & = & 33/16. \end{array}$$