TMA4135 Matematikk 4D, eksamen 18. desember 2007

Løsningsforslag

1 **a)**

i) Ved komplettering av kvadratet har vi at $\frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s+2)^2+1}$. Fra første skifteteorem har vi $\mathcal{L}(e^{at}\sin t)(s) = \frac{1}{(s-a)^2+1}$, og vi ser at

$$f(t) = e^{-2t}\sin t.$$

ii) Vi har at $\mathcal{L}(\frac{1}{2}t^2)(s) = \frac{1}{s^3}$. Fra andre skifteteorem har vi at $\mathcal{L}(u(t-2)\frac{1}{2}(t-2)^2)(s) = e^{-2s}\frac{1}{s^3}$, og vi har at

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t \leq 2, \\ \frac{1}{2}(t-2)^2 & \text{for} \quad 2 \leq t. \end{cases}$$

iii) Første skifteteorem gir $\mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s-1}$, og fra andre skifteteorem følger at $\mathcal{L}(u(t-1)e^{(t-1)})(s) = e^{-s}\frac{1}{s-1}$, og vi ser at

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t \leq 1, \\ e^{(t-1)} & \text{for} \quad 1 \leq t. \end{cases}$$

b) Vi transformerer ligningen og får

$$s^2Y - 1 + 4sY + 4Y = F(s),$$

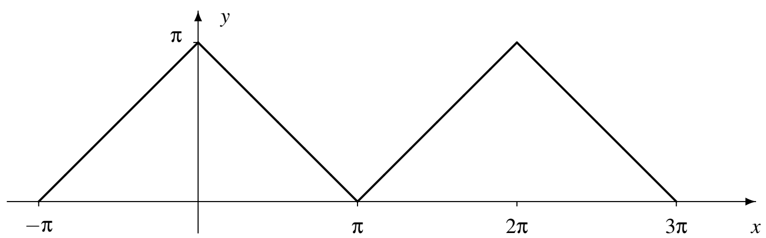
som gir oss

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2} + F(s)\frac{1}{(s-2)^2}.$$

Siden $\mathcal{L}(te^{-2t})(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$, får vi $y(t) = te^{-2t} + f(t) * te^{-2t} = g(t) + \int_0^t f(\tau)(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}d\tau$. Altså blir

$$g(t) = te^{-2t}.$$

2 **a)**



b) Cosinusrekka er $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, der $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx$, og $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx$.
Vi finner at $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_{2n} = 0$, og $a_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^2}$. Siden f er kontinuerlig og har høyre og venstre deriverte overalt, er

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \cdots\right).$$

Setter vi inn for $x = 0$, finner vi at $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3 **a)** Ved å sette inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ får vi to ligninger

$$F'' = kF$$
$$G' = kG$$

med randkravene $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

Dette gir $k = -n^2$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$ og funksjonene blir $u_0(x,t) = 1$ og $u_n(x,t) = e^{-n^2 t}\cos nx$ for $n = 1, 2, \ldots$.

b) Ved hjelp av resultatet fra oppgave 2b) finner vi

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{e^{-t}\cos x}{1} + \frac{e^{-9t}\cos 3x}{9} + \frac{e^{-25t}\cos 5x}{25} + \frac{e^{-49t}\cos 7x}{49} + \cdots\right).$$

4 Siden funksjonen $\sin(xw)$ er en odde funksjon blir $\int_{-1}^{1} e^{-ixw}dx = \int_{-1}^{1}\cos(xw)dx$. Altså blir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-ixw}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{1}\cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(xw)}{w}\right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(w)}{w}.$$

Dersom $f(x)$ betegner funksjonen som er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for} \quad |x| = 1 \\ 1 & \text{for} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

har vi nettopp regnet ut at $\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(w)}{w}$, og derfor er $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixw}\hat{f}(w)dw$. Siden $\hat{f}(w)$ er en likefunksjon er $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(xw)\hat{f(w)}dw$. Ved å sette inn $\hat{f}(w)$ har vi $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(xw)\sin w}{w}dw$. Ved å velge $x = \frac{1}{2}$ får vi

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(\frac{1}{2}w)\sin w}{w}dw = \frac{\pi}{2}.$$

5 Gradienten er $\nabla f = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$. I punktet $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ blir gradienten $\vec{w} = \nabla f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Vi ser at $\vec{a} \perp \vec{w}$ og $\vec{b} \perp \vec{w}$, følgelig er $D_{\vec{a}}(f)(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = D_{\vec{b}}(f)(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$. Retningen hvor f øker mest er $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

6 **a)** Ett skritt ($h = 0.1,\ t_0 = 0,\ y_0 = 0$) med RK4 gir

$$\begin{aligned}
k_1 &= 50(\cos t_0 - y_0) = 50 \\
k_2 &= 50(\cos(t_0 + \frac{h}{2}) - (y_0 + \frac{h}{2}k_1)) \approx -75.0625 \\
k_3 &= 50(\cos(t_0 + \frac{h}{2}) - (y_0 + \frac{h}{2}k_2)) \approx 237.5937 \\
k_4 &= 50(\cos(t_0 + h) - (y_0 + hk_3)) \approx -1.1382 \times 10^3 \\
y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx -12.7193.
\end{aligned}$$

b) Ett skritt ($h = 0.1,\ t_0 = 0,\ y_0 = 0$) med baklenges (implisitt) Euler gir

$$y_1 = y_0 + h[50(\cos(t_1) - y_1)] \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{6}(y_0 + 50h\cos(h)) \approx 0.8292.$$

Den eksakte løsningen i $t = 0.1$ er

$$y(0.1) = \frac{50}{2501}\left(50\cos 0.1 + \sin 0.1 - 50\mathrm{e}^{-50\cdot 0.1}\right) \approx 0.9899.$$

Vi ser at en eksplisitt metode (RK4) passer svært dårlig for denne stive ligningen.

7 **a)** Fra Crank-Nicolsons skjema (når $r = 1$)

$$\begin{aligned}
i = 1: \quad & 4U_1^1 - U_2^1 - U_0^1 &= U_2^0 + U_0^0,\\
i = 2: \quad & 4U_2^1 - U_3^1 - U_1^1 &= U_3^0 + U_1^0,\\
i = 3: \quad & 4U_3^1 - U_4^1 - U_2^1 &= U_4^0 + U_2^0,
\end{aligned}$$

hvor $U_0^0 = U_4^0 = 0$ er randbetingelsen for $t = 0$ og $U_4^1 = U_0^1 = k$ er randbetingelsen for $t = k$. Vi får

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix},$$

hvor

$$\begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = 8x(1-x^2),$$

er initialbetingelsen $(h = 1/4)$ og $k = 1/16$ er randbetingelsen, U_0^1 og U_4^1.

Ligningssystemet blir

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{33}{16} \\ 3 \\ \frac{33}{16} \end{bmatrix}.$$

b) En iterasjon med Gauss-Seidel, med $x_0 = 3/2, y_0 = 2, z_0 = 3/2$, gir

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{4}\left[\frac{33}{16} - (-1)\cdot y_0 - 0\cdot z_0\right] \approx 1.0156,\\
y_1 &= \frac{1}{4}\left[3 - (-1)\cdot x_1 - (-1)\cdot z_0\right] \approx 1.3789,\\
z_1 &= \frac{1}{4}\left[\frac{33}{16} - 0\cdot x_1 - (-1)\cdot y_1\right] \approx 0.8604.
\end{aligned}$$