LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4135 MATEMATIKK 4D, 09.08.2006

Oppgave 1

a) De Laplacetransformerte finner vi i tabellen.

$$
\begin{aligned}
&i) \qquad F(s) = \frac{1}{s^2}, \\
&ii) \qquad G(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \qquad\qquad \text{første skifteteorem,} \\
&iii) \qquad H(s) = e^{-2s}\frac{1}{(s-2)^2}, \qquad\qquad \text{andre skifteteorem.}
\end{aligned}
$$

b) Bruker vi Laplacetransformasjonen på ligningen får vi

$$sY - 1 - 3Y + \frac{1}{s-1}Y = e^{-2s}\frac{1}{s}.$$

Samler vi Y-leddene på høyre side får vi

$$
\begin{aligned}
(s^2 - 4s + 4)Y &= s - 1 + e^{-2s}\frac{1}{s}(s-1), \qquad \text{som gir} \\
Y &= \frac{s-1}{(s-2)^2} + e^{-2s}\frac{s-1}{s(s-2)^2} \\
&= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + e^{-2s}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Transformerer vi tilbake får vi

$$
\begin{aligned}
y(t) &= (1+t)e^{2t} + \frac{1}{4}\left(-1 + e^{2(t-2)} + 2(t-2)e^{2(t-2)}\right)u(t-2), \qquad \text{eller} \\
y(t) &= (1+t)e^{2t} + \frac{1}{4}\left((2t-3)e^{2(t-2)} - 1\right)u(t-2).
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i ligningen og får $G'F = 4F''G$. Ved å dele med $4FG$ får $\frac{G'}{4G} = \frac{F''}{F}$, og vi har separert variablene x og t. Denne ligningen holder bare dersom $\frac{F''}{F} = k$ der k er en konstant. For å få tilfredsstilt randbetingelsen må $k = -(\pi n)^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. For et gitt naturlig tall n har vi da

$$F_n'' = -(\pi n)^2 F_n \qquad \text{og} \qquad G_n' = -(2\pi n)^2 G_n.$$

Løsningene er

$$u_n(x,t) = B_n e^{-(2\pi n)^2 t} \sin n\pi x$$

for vilkårlige heltall n og vilkårlige konstanter B_n.

b) Superposisjonsprinsippet visere at løsningen av ligningen som tilfredstiller både randbetingelsen og initialbetingelsen er

$$u(x,t) = e^{-(2\pi)^2 t}\sin \pi x + \frac{1}{3}e^{-(6\pi)^2 t}\sin 3\pi x.$$

Oppgave 3

a) Enten man regner komplekst, bruker formlene i Rottmann eller bruker 2 ganger delvisintegrasjon, får man, om man regner rett,

$$A(w) + iB(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx + i\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx.$$

Siden $f(x) = 0$ for $x < 0$ er dette

$$A(w) + iB(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}e^{iwx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x+iwx}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(-1+iw)x}}{-1+iw}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{-1}{(-1+iw)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+w^2} + i\frac{w}{1+w^2}\right),$$

og siden $A(w)$ og $B(w)$ er reelle funksjoner er

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+w^2} \qquad \text{og} \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\frac{w}{1+w^2}.$$

b) Vi har

$$\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)) = \int_0^{\infty} A(w)\cos wx\,dw + \int_0^{\infty} B(w)\sin wx\,dw$$

Spesielt har vi for den odde delen av f, $f^{\text{odde}} = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, at

$$\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \int_0^{\infty} B(w)\sin wx\,dw.$$

Setter vi inn for $x = 2$ får vi

$$\frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{w\sin w\,2}{1+w^2}\,dw.$$

Følgelig er

$$\int_0^{\infty}\frac{w\sin 2w}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Oppgave 4 Enhetsvektoren i retningen $\mathbf{v}$ er $\mathbf{e} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$. Evaluerer vi funksjonen i punktet P får vi $f|_P = e^{-5}$. De partielderiverte er,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f &= (y+z)f,\\
\frac{\partial}{\partial y}f &= (z+x)f,\\
\frac{\partial}{\partial z}f &= (x+y)f.
\end{aligned}$$

Evaluerer vi i P finner vi at gradienten til f i P er $\mathrm{grad} f|_P = 2e^{-5}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$. Den retningsderiverte er altså

$$D_{\mathbf{e}} f|_P = \mathbf{e} \cdot \mathrm{grad} f|_P = 2e^{-5}.$$

Oppgave 5

a) Vi setter

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$$

Da får vi

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + 2y_2 + 4t \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}).$$

b) Lar vi $\mathbf{y}_n$ betegne den tilnærmede verdien til $\mathbf{y}(t_0 + nh)$ og setter $t_n = t_0 + nh$, sier Eulers metode at

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n).$$

I vårt tilfelle gir dette at

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

Bruker vi isteden initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + y_2 + t \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

får vi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 6 Siden mellomrummene er like store kan vi bruke Gregory-Newtons foroverdifferanseformel.

j	x_j	f_j	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$	$\Delta^4 f_j$
0	0	2	-3	6	-12	24
1	1	-1	3	-6	12	
2	2	2	-3	6		
3	3	-1	3			
4	4	2				

Polynomet blir

$$P(x) = 2 - 3\binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} - 12\binom{x}{3} + 24\binom{x}{4} \; = x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 2.$$

Vi observerer at funksjonen vi skal interpolere har tre like verdier. Det betyr at vi kan skrive $P(x)$ på formen

$$P(x) = 2 + x(x-2)(x-4)(ax+b).$$

Ved å evaluere for $x = 1$ og $x = 3$ får vi to lineære ligninger til bestemelse av koeffisientene a og b. Ligningene blir

$$\begin{aligned} a + b &= -1, \\ 3a + b &= 1, \end{aligned}$$

som gir $a = 1$ og $b = -2$. Dermed får vi $P(x) = 2 + x(x-2)^2(x-4)$.

Oppgave 7 For å bruke Gauss–Seidel, skriver vi om systemet, slik at de dominante diagonalleddene kommer på venstre side.

$$\begin{array}{lclclcl} x &=& & 0.25y & & - & 1.50, \\ y &=& 0.25x & + & 0.25z & - & 1.75, \\ z &=& & 0.25y & & - & 2.00. \end{array}$$

Gauss–Seidels metode er følgende

$$\begin{array}{lclclcl} x^{(n+1)} &=& & 0.25y^{(n)} & & - & 1.50, \\ y^{(n+1)} &=& 0.25x^{(n+1)} & + & 0.25z^{(n)} & - & 1.75, \\ z^{(n+1)} &=& & 0.25y^{(n+1)} & & - & 2.00. \end{array}$$

Med startverdiene $x^{(0)} = -2,\ y^{(0)} = -3,\ z^{(0)} = -3$ får vi

$$\begin{array}{lclclclcl} x^{(1)} &=& & -0.75 & & - & 1.50 &=& -2.25, \\ y^{(1)} &=& -0.5625 & - & 0.75 & - & 1.75 &=& -3.0625, \\ z^{(1)} &=& & -0.765625 & & - & 2.00 &=& -2.765625. \end{array}$$