TMA4135 Matematikk 4D høsten 2014

Løsningsforslag til øving 13

1 **a)** Vi innfører nye variabler $y_1 = y$ og $y_2 = y'$, og får differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= (1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned} \qquad \text{med initialbetingelser} \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

b) For differensialligningssystemet i oppgave **a)** blir «baklengs Euler» gitt ved

$$\mathbf{y}'_{n+1} = \begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_{2,n} \\ (1 - y_{1,n+1}^2)y_{2,n+1} - y_{1,n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}).$$

Med $n = 0$, $h = 0{,}1$ og initialbetingelsene $y_{1,0} = 2$ og $y_{2,0} = 0$ får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= 2 + 0{,}1 y_{2,1} \\ y_{2,1} &= 0{,}1\big[(1 - y_{1,1}^2)y_{2,1} - y_{1,1}\big]. \end{aligned}$$

Multipliserer vi begge ligningene med 10, kan ligningssystemet skrives

$$\begin{aligned} 10y_{1,1} - y_{2,1} - 20 &= 0 \\ y_{1,1} + (9 + y_{1,1}^2)y_{2,1} &= 0. \end{aligned}$$

c) Jacobimatrisen til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

er gitt ved

$$J(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 + 2y_1y_2 & 9 + y_1^2 \end{bmatrix}.$$

Vi lar nå $y_i^{(n)}$ være den numeriske løsningen av y_i etter n iterasjoner med Newtons metode, der $i = 1, 2$. For å finne

$$y_1^{(1)} = y_1^{(0)} + \Delta y_1^{(0)} \quad \text{og} \quad y_2^{(1)} = y_2^{(0)} + \Delta y_2^{(0)},$$

løser vi ligningen

$$J(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) \begin{bmatrix} \Delta y_1^{(0)} \\ \Delta y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10y_1^{(0)} - y_2^{(0)} - 20 \\ y_1^{(0)} + \big(9 + (y_1^{(0)})^2\big)y_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

med hensyn på $(\Delta y_1^{(0)}, \Delta y_2^{(0)})$. Med startverdiene $y_1^{(0)} = 2$ og $y_2^{(0)} = 0$ får vi

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1^{(0)} \\ \Delta y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som har løsning $\Delta y_1^{(0)} = -0{,}02$ og $\Delta y_2^{(0)} = -0{,}15$.
Dette gir at

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_1^{(0)} + \Delta y_1^{(0)} = 1{,}98 \\ y_2^{(1)} &= y_2^{(0)} + \Delta y_2^{(0)} = -0{,}15. \end{aligned}$$

2 **a)** Vi gjør tilnærmelsene

$$u_{xx}(ih, jh) \approx \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2},$$

og

$$u_{yy}(ih, jh) \approx \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2}.$$

Innsatt i ligningen $u_{xx} + 2u_{yy} = 0$ gir dette

$$\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2} + 2 \cdot \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2},$$

det vil si,

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

b) Initialbetingelsene gir at

$$U_{i,0} = U_{0,j} = 0 \quad \text{og at} \quad U_{i,1} = U_{1,j} = 1.$$

Kombinerer vi dette med differanseskjemaet vi fant i **a)** og setter inn for $i, j = 1, 2$ får vi ligningene

$$\begin{aligned}
-6U_{1,1} + U_{2,1} + 2U_{1,2} \phantom{+ 2U_{2,2}} &= 0,\\
U_{1,1} - 6U_{2,1} + 2U_{2,2} &= -1,\\
2U_{1,1} - 6U_{1,2} + U_{2,2} &= -2,\\
2U_{2,1} + U_{1,2} - 6U_{2,2} &= -3.
\end{aligned}$$

En iterasjon med Gauss–Seidel anvendt på dette ligningssystemet, med startvektoren $\mathbf{U}_0 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, gir

$$\begin{aligned}
U_{1,1}^{(1)} &= -\tfrac{1}{6}\big(0 - \tfrac{1}{2} - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\big) &&= \tfrac{1}{4},\\
U_{2,1}^{(1)} &= -\tfrac{1}{6}\big(-1 - \tfrac{1}{4} - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\big) &&= \tfrac{3}{8},\\
U_{1,2}^{(1)} &= -\tfrac{1}{6}\big(-2 - 2 \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\big) &&= \tfrac{1}{2},\\
U_{2,2}^{(1)} &= -\tfrac{1}{6}\big(-3 - 2 \cdot \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\big) &&= \tfrac{17}{24}.
\end{aligned}$$

3 **a)** Differensialligningen

$$y'(x) = xy(x)$$

er separabel, der vi, ved å integrere

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x,$$

får

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C',$$

der C' er en vilkårlig konstant. Ved å anvende eksponensialfunksjonen får vi

$$y(x) = Ce^{x^2/2}.$$

Fra initialbetingelsen $y(0) = 1$ slutter vi at $C = 1$, og

$$y(x) = e^{x^2/2}.$$

Eulers metode er gitt ved

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_o),$$

der $f(x, y) = xy$. Det gir

$$y_1 = y_0 + hx_0 y_0 = y_0 = 1,$$

da $x_0 = 0$.

b) I vårt tilfelle er

$$\begin{aligned}
k_1 &= hx_0 y_0 = 0\\
k_2 &= h\left(x_0 + \frac{h}{3}\right)\left(y_0 + \frac{k_1}{3}\right) = \frac{h^2}{3}
\end{aligned}$$

og

$$k_3 = h\left(x_0 + \frac{2h}{3}\right)\left(y_0 + \frac{2k_2}{3}\right) = \frac{2}{3}h^2\left(1 + \frac{2}{9}h^2\right).$$

Det gir

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3 = y_0 + \frac{1}{2}h^2\left(1 + \frac{2}{9}h^2\right) \approx 1{,}00501.$$

Den eksakte verdien er $y(0{,}1) = e^{0{,}1^2/2} \approx 1{,}00501$, og vi ser at Runge–Kutta metoden gir et bedre resultat enn Eulers metode.

4 Velg steglengder k og h i henholdsvis x- og t-retningen, h velger du slik at $N = 1/h$ blir et heltall. Gitterpunktene blir da

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \qquad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Vi er altså ute etter numeriske approksimasjoner til løsningen i gitterpunktene, det vil si $U_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$.

a) For å konstruere et eksplisitt skjema velger vi et gitterpunkt x_i, t_j og approksimerer u_t med en foroverdifferanse og u_{xx} og u_x med en sentraldifferanse rundt dette gitterpunktet. Det betyr

$$\begin{aligned}
u_t(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} \\
u_{xx}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} \\
u_x(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h}.
\end{aligned}$$

La nå $U_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$, sett inn i differensialligningen, og vi får

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}$$

eller

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \frac{k}{h^2}\big(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\big) + \frac{k}{2h}\big(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\big), \qquad i = 1, \ldots, N-1,$$

for $j = 0, 1, 2, \ldots$, gitt startverdiene $U_{i,0} = 8x_i(1 - x_i)$ for $i = 0, 1, \ldots, N$ og randverdiene $U_{0,j} = U_{N,j} = t_j$ for $j = 0, 1, \ldots$

Med $h = 1//4$ og $k = 1/16$ får vi $N = 4$, $k/h^2 = 1$ og $k/2h = 0{,}125$. Vi har dessuten

$$U_{0,0} = U_{4,0} = 0, \quad U_{1,0} = U_{3,0} = 1{,}5, \quad \text{og} \quad U_{2,0} = 2{,}0.$$

Det gir

$$u(0{,}25, 0{,}0625) \approx U_{1,1} = 0{,}75, \qquad u(0{,}5, 0{,}0625) \approx U_{2,1} = 1{,}0, \qquad u(0{,}75, 0{,}0625) = 0{,}25.$$

NB! Siden $k/h^2 > 1/2$ bør vi ikke stole på dette resultatet, men heller benytte en implisitt metode, som i neste oppgave.

b) Ideen nå er å erstatte sentraldifferansene for u_x og u_{xx} i oppgave **a)** med *middelverdien* av sentraldifferansene for disse beregnet i x_i, t_j og x_i, t_{j+1}. Vi ender da med følgende skjema:

$$\begin{aligned}
\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}}{2h}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}\right)
\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}
U_{i,j+1} &- \frac{k}{2h^2}\big(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}\big) - \frac{k}{4h}\big(U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}\big) \\
&= U_{i,j} + \frac{k}{2h^2}\big(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\big) + \frac{k}{4h}\big(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\big).
\end{aligned}$$

Setter vi inn de samme verdiene som i oppgave **a)**, samt at $U_{0,1} = U_{4,1} = 0{,}0625$ gir dette:

$$\begin{aligned} 2\,U_{1,1} - 0{,}5625\,U_{2,1} \qquad\qquad &= 1{,}125 + 0{,}109375 = 1{,}234375, \\ -0{,}4375\,U_{1,1} + \quad 2\,U_{2,1} - 0{,}5625\,U_{3,1} &= 1{,}500 \qquad\qquad\quad = 1{,}500, \\ -\,0{,}4375\,U_{2,1} + \quad 2\,U_{3,1} &= 0{,}875 + 0{,}140625 = 1{,}015625 \end{aligned}$$

der det siste ledded i summen på høyre side kommer fra randbetingelsene i $t_1 = 0{,}0625$.

c) To iterasjoner med Gauss–Seidel gir:

$$\begin{array}{lll} U_{1,1}^{(0)} = 1{,}5 & U_{2,1}^{(0)} = 2{,}0 & U_{3,1}^{(0)} = 1{,}5 \\ U_{1,1}^{(1)} = 1{,}03906 & U_{2,1}^{(1)} = 1{,}53979 & U_{3,1}^{(1)} = 0{,}88761 \\ U_{1,1}^{(2)} = 1{,}05025 & U_{2,1}^{(2)} = 1{,}22938 & U_{3,1}^{(2)} = 0{,}81971. \end{array}$$

5

a) Vi vil løse ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 27(x+y),$$

på firkanten $[0,1]\times[0,1]$ med randbetingelser

$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 3x, \quad u(1,y) = 3y.$$

Approksimasjon av ligningen i noden (x_i, y_j) ved hjelp av sentraldifferanser, gir

$$U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i-1,j} - 4U_{i,j} = h^2 f(x_i, y_j),$$

hvor $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$, $f(x,y) = 27(x+y)$, $x_i = ih$, $y_j = jh$ og $h = 1/3$.
Approksimasjon av ligningen i (x_i, y_j), hvor $i, j \in \{1,2\}$, gir ligningene

$$\begin{aligned} -4U_{1,1} + U_{1,2} + U_{2,1} + 0 + 0 &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 27\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\right) \quad \text{i} \quad (x_1, y_1), \\ U_{1,1} - 4U_{2,1} + U_{2,2} + 0 + 3\cdot\tfrac{1}{3} &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 27\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\right) \quad \text{i} \quad (x_2, y_1), \\ U_{1,1} - 4U_{1,2} + U_{2,2} + 3\cdot\tfrac{1}{3} + 0 &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 27\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) \quad \text{i} \quad (x_1, y_2), \\ U_{2,1} + U_{1,2} - 4U_{2,2} + 3\cdot\tfrac{2}{3} + 3\cdot\tfrac{2}{3} &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 27\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\right) \quad \text{i} \quad (x_2, y_2). \end{aligned}$$

Dette kan skrives på matriseform

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{$*$}$$

b) En iterasjon med Gauss–Seidel anvendt på ligningssystemet $(*)$ vi fant i **a)** med startvektoren $\mathbf{U}_0 = -(1,1,1,1)$, gir

$$\begin{aligned} U_{1,1}^{(1)} &= -\tfrac{1}{4}\big(2 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\big) = -1, \\ U_{2,1}^{(1)} &= -\tfrac{1}{4}\big(2 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\big) = -1, \\ U_{1,2}^{(1)} &= -\tfrac{1}{4}\big(2 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\big) = -1, \\ U_{2,2}^{(1)} &= -\tfrac{1}{4}\big(0 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\big) = -0{,}5. \end{aligned}$$

6 Integrallignigen kan skrives ved hjelp av et konvolusjonsprodukt,

$$f(t) = 1 - (g * f)(t), \tag{1}$$

der $g(t) = t$.

La $\mathscr{L}(f) = F$. Laplacetransformasjon anvendt på (1) gir

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}F(s),$$

der vi har utnyttet at $\mathscr{L}(g * f) = \mathscr{L}(g) \cdot \mathscr{L}(f)$, og at $\mathscr{L}(g)(s) = 1/s^2$. Vi kan skrive ligningen over som

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) F(s) = \frac{s^2+1}{s^2} F(s) = \frac{1}{s},$$

slik at

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Ettersom $\mathscr{L}\{\cos t\} = s/(s^2+1)$, har vi at

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)(t) = \cos t.$$

7 **a)** Ettersom $f(x)$ er en jevn funksjon er fourierrekken til $f(x)$ gitt ved en fouriercosinusrekke der

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^a \mathrm{d}x = \frac{a}{\pi},$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\sin na}{n} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Altså har vi at fourierrekken til $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin na}{n}\cos nx.$$

b) Teorem 2, side 480 i boken, forteller oss at summen til fourierrekken til $f(x)$ er lik

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right].$$

Merk at hvis f er kontinuerlig i x så er $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$. Dette betyr at

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin na}{n}\cos nx = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = a, \\ 0 & \text{for } a < x \le \pi. \end{cases}$$

Innsatt for $x = 0$ gir at

$$f(0) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin na}{n} = 1, \quad \text{det vil si} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}.$$

Innsatt for $x = a$, samt bruke at $2\sin na\cos na = \sin 2na$, gir at

$$f(a) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin na}{n}\cos na = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2na}{2n} = \frac{1}{2},$$

det vil si

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2na}{2n} = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}.$$

8 **a)** Ved å benytte at $\int xe^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{x}{i\omega}\right)e^{-i\omega x}$ får vi at den fouriertransformerte til $f(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^2 (2-|x|)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\int_{-2}^2 e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^2 |x|e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{4}{\omega}\sin 2\omega + \int_{-2}^0 xe^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x - \int_0^2 xe^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{4}{\omega}\sin 2\omega - \frac{4}{\omega}\sin 2\omega + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2\cos 2\omega}{\omega^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}.
\end{aligned}$$

b) Merk at $1 - \cos 2\omega = 2\sin^2\omega$. Fra **a)** vet vi at

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\sin^2\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Setter vi inn for $x = 0$ får vi at

$$f(0) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = 2,$$

det vil si,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}.$$

9

a) La funksjonen $\hat{u}$ være gitt ved å anvende fouriertransformasjon på u med hensyn på x,

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Fra egenskapene til fouriertransformasjon får vi at

$$\mathscr{F}(u_{xx}) = -\omega^2\hat{u}.$$

Fouriertransformasjon anvendt på den partielle differensialligningen gitt i oppgaven gir

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} = -\omega^2\hat{u}.$$

Fouriertransformasjon anvendt på initialbetingelsen gir

$$\hat{u}_t(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,0)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x} = \hat{f}(\omega).$$

Altså kan vi, ved å anvende fouriertransformasjon, skrive det gitte problemet som initialverdiproblemet

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} = -\omega^2\hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{f}(\omega). \tag{2}$$

b) Hvis vi fikserer ω kan vi skrive (2) som den ordinære differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{f}(\omega),$$

som har løsning

$$\hat{u}(\omega,t) = C(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

Fra $\hat{u}_t(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ får vi

$$\hat{u}_t(\omega,0) = -\omega^2 C(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Altså er

$$\hat{u}(\omega,t) = -\frac{1}{\omega^2}\hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

Ettersom $\hat{f} = \mathscr{F}(g'') = -\omega^2\hat{g}$ forenkler dette seg til

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega)e^{-\omega^2 t}. \tag{3}$$

c) La funksjonen $\hat{h}$ være gitt ved

$$\hat{h}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2 t},$$

slik at (3) kan skrives som

$$\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}(\omega)\, \hat{h}(\omega, t). \tag{4}$$

Ved å ta inverstransformasjonen av (4) får vi

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-p) h(p, t)\, \mathrm{d}p,$$

der

$$h(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega, t) e^{i\omega p}\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2t} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega p}\, \mathrm{d}\omega \right)}_{e^{-p^2/4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-p^2/4t}, \quad t > 0,$$

hvor vi har benyttet den oppgitte fouriertransformasjonen (i formelarket)

$$\mathscr{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

med $a = 1/4t$. Altså har vi at

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-p)\, e^{-p^2/4t}\, \mathrm{d}p, \quad t > 0.$$