Løsningsforslag — Midtsemesterprøven

TMA 4140 — Diskret matematikk — 2003

Oppgavene på flervalgsoppgaven var de samme for alle sammen, men i forskjellig rekkefølge.

1. **Oppgaveteksten:**
   Hvilke av utsagnene under er logisk ekvivalente med utsagnet $(p \to q) \vee r$ der p, q og r er utsagn og $P(x)$ er en utsagnsfunksjon. a) $p \to q$ b) $(p \to q) \wedge r$ c) $(p \to q) \vee r \vee (\exists x P(x) \vee \forall x \neg P(x))$ d) $(\neg p \vee q) \vee r$
   Løsningsforslag:
   $(p \to q)$ er logisk ekvivalent med $(\neg p \vee q)$, så d) er et riktig svar. $\exists x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$ er alltid sant, så c) er en tautologi. Utsagnet vi sammenligner med er ikke en tautologi, så c) er ikke et riktig svar. Vi kan f.eks. bruke sannhetstabeller for å vise at hverken a) eller b) er riktige svar.

2. **Oppgaveteksten:**
   I denne oppgaven er $f(x) = x \log x$. Hvilke av utsagnene under er sanne? a) $f(x)$ er $O(x^2)$. b) $f(x)$ er $\Omega(x)$. c) $f(x)$ er $\Theta(x^2)$. d) Ingen av alternativene over er sanne.
   Løsningsforslag:
   Hvis $x \geq 10$ har vi at $1 \leq \log x \leq x$, så $x \leq x + logx \leq x^2$. Dermed er a) og b) riktige. f er derimot ikke $\Omega(x^2)$, så c) og d) er ikke riktige svar.

3. **Oppgaveteksten:**
   Hvilke av funksjonene nedenfor er bijeksjoner? (Vi minner om at en bijeksjon er en funksjon som bde er en–til–en og p.) a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2x$. b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x$. c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = x + 2$. d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = x^2$. e) $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad f(x) = x^3 \textbf{ mod } 5$.
   Løsningsforslag:
   Funksjonen i a) er ikke på, for eksempel er det ingen verdier x slik at $f(x)1$. Funksjonene i b) er en bijeksjon. I c) er det f.eks. ingen verdier x slik at $f(x) = 1$. d) er hverken en–til–en eller på. e) er en bijeksjon (sjekk alle fem verdiene for hånd.)

4. **Oppgaveteksten:**
   Hvilke av tallene nedenfor er lsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{19} \\ x &\equiv 4 \pmod{23} \\ x &\equiv 5 \pmod{14} \end{aligned}$$

   (Hint: $x = -3607$ er en lsning.) a) 0 b) 2511 c) 2513 d) 8629 e) 8631
   Løsningsforslag:
   $19 \cdot 23 \cdot 14 = 6118$. Siden -3607 er en løsning forteller den kinesiske restsetningen oss at $-3607 + 6118 = 2511$ og $-3607 + 2 \cdot 6118 = 8629$ er løsninger og at de andre ikke er det.

5. **Oppgaveteksten:**
   Vi har en boks med klosser. 20 av klossene er bl, 20 er runde og 20 har glatt overflate. Det er 40 klosser som har minst en av de tre nevnte egenskapene. Dessuten vet vi at det er 10 klosser som er bde runde og bl, 10 som er bde bl og har glatt overflate og 10 som er runde og har glatt overflate. Finnes det noen klosser i boksen som har alle tre egenskapene? a) Ja. b) Nei.
   Løsningsforslag:
   La A være mengden av blå klosser, B mengden av røde klosser og C mengen av klosser med glatt overflate. Vi vet at $|A \cup B \cup C| = 40$, at $|A| = |B| = |C| = 20$ og at $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 10$. Vi vet også at $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Fra dette følger det at $|A \cap B \cap C| = 10$. Det er med andre ord ti klosser med alle tre egenskapene.

6. **Oppgaveteksten:**
   Hvilke av tallene nedenfor er inverser til 19 modulo 23? a) -6 b) 6 c) 29 d) 40 e) 46
   Løsningsforslag:
   $-6 \cdot 19 = -114$. Deler vi dette på 23 får vi en rest på en, så -6 er en invers til 19 modulo 23. Dermed er $-6 + 23 = 17$ og $17 + 23 = 40$ inverser. De andre tallene er ikke kongruente med -6 modulo 23, så de kan ikke være inverser til 19 modulo 23.

7. **Oppgaveteksten:**
Hvilke av tallene nedenfor er kongruente med 10^{2003} modulo 101? a) -10 b) 10 c) 2003 d) 10015 e) Ingen av de foregende tallene.
Løsningsforslag:
Fermats lille setning forteller oss at 10^{100} er kongruent med 1 modulo 101. Dermed er 10^{2003} kongruent med 1000 modulo 101. 1000 er kongruent med -10 modulo 101. Så a) er riktig. Ingen av de andre tallene er kongruente med -10 modulo 101.

8. **Oppgaveteksten:**
3 kvinner og 11 menn mtes for spille fotball. La tallet A vre antall forskjellige lag av 11 de kan stille med nyaktig 2 kvinner og la B vre antall lag av 11 de kan stille med nyaktig 3 kvinner. Hvilke av utsagnene er sanne? a) $A > B$ b) $A < B$ c) $A = B$
Løsningsforslag:
$A = \binom{3}{2}\binom{11}{9}$ og $B = \binom{3}{3}\binom{11}{8}$. Med litt lett regning (det holder nesten å skrive opp hva $\binom{3}{2}$ osv. er) ser vi at tallene er like.

9. **Oppgaveteksten:**
Syv kandidater stiller ved studentvalget. Ved avstemmingen skal hver student rangere de syv kandidatene. Hvor mange mter kan man stemme p? (Vi antar at alle kandidatene m rangeres.) a) 1 b) 7 c) 7^2 d) 7! e) $\binom{7}{7}$
Løsningsforslag:
Hvor mange måter kan man sortere syv på? 7 på første plass, 6 på andre plass hvis første plass er valgt, osv. Så 7!. Ingen av de andre er lik dette.

10. **Oppgaveteksten:**
Det er kjent at prinsessen (P) er i et av fire rom og at det er en tiger (T) i hvert av de andre rommene. P dren til hvert rom str en tekst:
1: P er enten her eller i rom 3
2: Hvis P er her, da er teksten p dren til rom 3 usann
3: T er i rom 1 og T er i rom 4
4: Hvis T er her, da er P i rom 2
Det er kjent at en av tekstene er usann og at de tre andre er sanne. Hvor er prinsessen?
Løsningsforslag:
Hun er i rom 3. (Lag en sannhetstabell. Bruk utsagnene p: hun er i rom 1, q: hun er i rom to, osv. Det er kun fire tilfeller som trengs sjekkes, hva er sannhetsverdiene til lappene avhengig av hvilket av de fire rommene hun er i.)

11. **Oppgaveteksten:**
    Finn *alle* heltallslsninger til ligningen under. Svaret skal begrunnes og alle utregninger skal vises. Hvis du bruker kalkulator i utregningene skal du antyde det hver gang den brukes. Hvis det ikke finnes noen heltallslsninger skal du forklare hvorfor. $15x + 8y = 1$
    Løsningsforslag:
    Enten så ser vi det med en gang, eller så kan vi bruke Euklids algoritme til å se at $x = -1$ og $y = 2$ er en løsning. Anta at X og Y er en annen løsning. Da ser vi, siden 15 og 8 er relativt primiske, at $X - x$ må være et mutiplum av 8 og at $Y - y$ må være et multiplum av 15. Med litt mer arbeid ser vi at vi har følgende generelle løsning:
    $x = -1 + 8k, \quad y = 2 - 15k, \quad k \in \mathbb{Z}.$