Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontaktperson:
Sverre O. Smalø
735 – 91750

MIDTSEMESTERPRØVE I FAG TMA4140 DISKRET MATEMATIKK

Torsdag 7. oktober 2004
Tid : 08.15-10.00

Tillatte hjelpemidler (Kode C): Enkel kalkulator (HP30S);
Rottmann: Matematisk formelsamling.

INSTRUKSJONER

1) Oppgavesettet skal ikke åpnes før dere får beskjed om det.

2) Oppgavesettet har 10 oppgaver. Det er 8 flervalgsoppgaver der ett eller flere av svaralternativene er riktige. Det er to enkeltoppgaver som krever begrunnelser.

3) Svarene på flervalgsoppgavene gis ved at riktig(e) alternativ krysses av på eget ark som du finner bakerst i oppgavesettet, mens svarene på de to enkeltoppgavene leveres på separate ark som dere får av eksamensvaktene.

4) Hvert riktig svar på en flervalgsoppgave gir ett poeng, mens hvert galt svar gir ett poeng i trekk. Flervalgsoppgavene teller 80% av settet, mens de to enkeltoppgavene teller 20%.

5) Du skal levere svararket på flervalgsoppgave sammen med oppgavesettet. Pass på at studentnummeret ditt er skrevet på alle ark som leveres inn.

1. Hvilke av utsagnene under er ekvivalent med utsagnet $(\neg p \vee q) \rightarrow r$, der p, q og r er utsagn?

   a) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
   b) $(p \wedge \neg q) \vee r$
   c) $\neg r \rightarrow (p \wedge \neg q)$
   d) $(p \vee \neg q) \wedge r$

   LØSNING: a), b) og c) er korekte.

2. Hvilke av utsagnene under er ekvivalent med utsagnet $\neg(\forall x \exists y(P(x, y)))$, der $P(x, y)$ er en utsagnsfunksjon i to variable?

   a) $\neg(\forall y \exists x(P(y, x)))$
   b) $\exists x \forall y(\neg(P(x, y)))$
   c) $\exists x \exists y(\neg(P(x, y)))$
   d) $\forall x \exists y(\neg(P(x, y)))$

   LØSNING: a) og b) er korekte.

3. La M være en endelig mengde med m elementer og N en endelig mengde med n elementer. Hvilke av påstandene under er korekte?

   a) Potensmengden til M har 2^m elementer.
   b) Antall funksjoner fra M til N er m^n
   c) Antall funksjoner fra M til N som er injektive er $m! - n!$.
   d) $m = n$ hvis og bare hvis det finnes en bijeksjon fra M til N.

   LØSNING: a) og d) er korekte.

4. La $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $f(n) = 2^n + n!$. Hvilke av påstandene under er korrekte?

   a) $f(x)$ er $O(2^n)$
   b) $f(x)$ er $O(n!)$
   c) $f(x)$ er $\Omega(2^n)$
   d) $f(x)$ er $\Omega(n!)$

   LØSNING: b), c) og d) er korekte.

5. Hvilke av tallene nedenfor er løsning til følgende systemet av lineære kongruenser?
   $x \equiv 17 (\bmod 19)$
   $x \equiv 21 (\bmod 23)$
   $x \equiv 15 (\bmod 17)$

   a) 435
   b) 7427
   c) 389
   d) -2

   LØSNING: b) og d) er korekte.

6. Hvilke av tallene nedenfor er invers til 28 modulo 29?

   a) 5
   b) 7
   c) 14
   d) 28

   LØSNING: d) er korekt.

7. Hvilke av tallene nedenfor er kongruente med $2^{2^{10}}$ modulo 31?

   a) 2
   b) 4
   c) 8
   d) 16

   LØSNING: d) er korekt.

8. La skriftegnene $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E$ og F representere tallene mellom 0 og 15 i det hexadesimale tallsystemet. Hvilke av tallene i desimalsystemet, det oktale tallsystemet, 4-tallsystemet og det binære tallsystemet representerer tallet $(2AE0B)_{16}$

   a) $(175627)_{10}$
   b) $(527012)_8$
   c) $(222320023)_4$
   d) $(101010111000001010)_2$

   LØSNING: a) og c) er korekte.

9. La $H_n = 1+1/2+1/3+....+1/n$ for $n \geq 2$. Vis ved hjelp av induksjon at $H_{2^n} \geq 1+n/2$ for all $n \geq 2$.

   LØSNING: $H_{2^n} = 1+1/2+....+1/2^n$. Vi må sjekke at påstanden holder for $n=1$. Dvs. $H_{2^1} \geq 1+1/2$. Høyre side av dene ulikheten er $H_{2^1} = H_2 = 1+1/2$ så ulikheten holder for $n=1$.

   La oss nå anta at påstanden holder for en $k \geq 1$, og vi vil vise at den da også holder for $k+1$. Vi ser da på

   $H_{2^{k+1}} = 1+1/2+...+1/2^k+1/(2^k+1)+...+1/2^{k+1} = H_{2^k}+1/(2^k+1)+1/(2^k+2)+...+1/(2^k+2^k)$.

   Nå vil den siste delen av summen i uttrykket over ha 2^k ledd og hvert ledd er større enn eller likt det siste leddet som er $1/2^{k+1}$. Vi får derfor at summen av de siste leddene er større enn $2^k/2^{k+1} = 1/2$. Ved å bruke induksjonsantagelsen får vi da

   $$H_{2^{k+1}} \geq H_{2^k} + 1/2 \geq 1 + k/2 + 1/2 = 1 + (k+1)/2$$

   der induksjonsantagelsen brukes i den andre ulikheten. Dette beviser at induksjonssteget holder. Ved induksjon følger nå påstanden.

10. Bruk Euclids algoritme til å finne inversen til 9 modulo 13.

    LØSNING:

    $13 = 9 + 4$
    $9 = 2 \cdot 4 + 1$
    Ved å sette inn får vi da $1 = 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 2(13-9) = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 13$. Inversen til 9 modulo 13 blir da 3. (En kan erstatte 3 med alle tall som er kongruent med 3 modulo 13, ie alle tall på formen $3 + k13$ der k er et helt tall.)