Løsningsforslag Øving 2
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

1-6-22
At $A \times B$ ikke er tom betyr at det finnes et ordnet par $(a, b) \in A \times B$. Men $a \in A$ og $b \in B$, og det betyr at både A og B er ikke tomme.

Det kontrapositive utsagnet sier at $A \times B$ er tom hvis og bare hvis A er tom eller B er tom. Vi har altså gitt et indirekte bevis for dette.

Legg merke til at vi ikke kan si noe om A eller B hver for seg. Det kan være den ene eller den andre eller begge som er tom(me).

1-7-15
Å si at $x \in A - B$ er det samme som å si at $x \in A$ *og* at $x \notin B$. Men dette er det samme som å si at $x \in A \cap \bar{B}$. Dermed har mengdene nøyaktig de samme elementene, så mengdene må være like.

1-7-16

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A$$

Her har vi brukt den distributive loven for mengder (tabell 1, side 89 i 5. utgave av Rosen).

1-8-27
Om en funksjon er på eller ikke, avhenger av hvilket kodomene man velger. Man kan lage en konstruksjon der det *ikke* er nødvendig at g er på selv om både f og $f \circ g$ er på. Her er et eksempel.

$A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{d\}$, $g : A \to B$ og $f : B \to C$ der $g(a) = b$, $f(b) = f(c) = d$, Her blir $f \circ g$ en funksjon fra A til C, $(f \circ g)(a) = d$. f og $f \circ g$ er på, mens g ikke er på (elementet $c \in B$ blir ikke "truffet").

1-8-37
Legg først merke til at $f^{-1}(\bar{S})$ og $\overline{f^{-1}(S)}$ er delmengder av A. (Her står $f^{-1}(S)$ for det *inverse bildet* av mengden S, se tekst over oppgave 1.8.34. I denne oppgaven krever vi ikke at f skal være en bijeksjon, som er et nødvendig krav for at f^{-1} er en *funksjon*.)

Da har vi, ved å anvende f og dens inverse litt frem og tilbake,

$$a \in f^{-1}(\bar{S}) \equiv f(a) \in \bar{S} \equiv f(a) \notin S \equiv a \notin f^{-1}(S) \equiv a \in \overline{f^{-1}(S)}.$$

Siden a er et element i den første mengden hvis og bare hvis a er et element i den andre mengden (og dette gjelder for alle a), må mengdene være like.

1-8-63
Vi lager medlemskapstabeller, og sjekker at høyre og venstre side av ligningene er har samme verdi i alle mulige tilfeller. Likheten er da oppfyllt.

a)

$f_A(x)$	$f_B(x)$	$f_{A\cap B}(x)$	$f_A(x)f_B(x)$
1	1	1	1·1=1
1	0	0	1·0=0
0	1	0	0·1=0
0	0	0	0·0=0

b)

$f_A(x)$	$f_B(x)$	$f_{A\cup B}(x)$	$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x)$
1	1	1	1+1-1·1=1
1	0	1	1+0-1·0=1
0	1	1	0+1-0·1=1
0	0	0	0+0-0·0=0

c)

$f_A(x)$	$f_{\bar{A}}(x)$	$1 - f_A(x)$
1	0	1-1=0
0	1	1-0=1

d)

$f_A(x)$	$f_B(x)$	$f_{A\oplus B}(x)$	$f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x)$
1	1	0	1+1-2·1·1=0
1	0	1	1+0-2·1·0=1
0	1	1	0+1-2·0·1=1
0	0	0	0+0-2·0·0=0

1-8-64
Vi har to endelige mengder A og B med samme kardinalitet, la oss si $|A| = |B| = n$, og en funksjon $f : A \to B$.

Hvis f er en–til–en så er det like mange elementer i $f(A)$ som i A. Dermed må f være på.

Hvis f er på, så vet vi at $f(A)$ og B har like mange elementer. Anta at f ikke er en–til–en. Da må $f(A)$ ha færre elementer enn A. Siden A og B har samme kardinalitet må $f(A)$ ha færre elementer enn B, men vi vet at dette ikke er sant siden f er på. Dermed må antagelsen være usann, så f må være en–til–en.

2-1-3
prosedyre $sum(a_1, ..., a_n$:heltall)
{Vi skriver kommentarer i slike klammer. Slike kommentarer er ikke del av koden. Vi har kalt algoritmen vår "sum", og algoritmen tar som input en liste $a_1, ..., a_n$ over heltall.}
$sum := a_1$ {Vi starter med det første leddet i summen.}

for i:=2 **to** n {Så summerer vi over resten av leddene, fra a_2 til a_n.}
$sum := sum + a_i$
{Sum har nå den ønskede verdien.}

2-1-6
prosedyre $negativ(a_1, ..., a_n$: heltall)
$antallNegativ := 0$ {Vi definerer vår variabel, som vi skal bruke til å telle antall negative tall med.}
for i:=1 **to** n {Så går vi gjennom listen vår, og øker antallNegativ med en for hvert element i listen som er negativt.}
if $a_i < 0$ **then** $antallNegativ := antallNegativ + 1$
{antallNegativ har nå den ønskede verdien.}