Løsningsforslag Øving 3
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

1-5-14

a) $p : x^2$ er irrasjonal — $q : x$ er irrasjonal. Informasjonen vi er gitt er $p \to q$ og q. Fra dette kan vi ikke trekke noen logisk slutning om sannhetsverdien til p, slik det gjøres her. Så slutningen er ikke korrekt.

b) $P(x)$: tallet x er irrasjonalt.

Informasjonen vi er gitt er: $\forall x(P(x^2) \to P(x))$ og $P(\pi^2)$. Fra $\forall x(P(x^2) \to P(x))$ kan vi konkludere at $P(\pi^2) \to P(\pi)$, som sammen med $P(\pi^2)$ gjør at vi kan konkludere $P(\pi)$. Dermed er slutningen korrekt.

1-5-20

$p : n$ er et partall — $q : n^2$ er et partall. Vi ønsker å bevise $p \to q$.

a) Et direkte bevis: At n er et partall er det samme som at det finnes et heltall k slik at $n = 2k$. Dermed får vi $n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$. Siden $2k^2$ er et heltall forteller dette oss at n^2 er et partall.

b) Et indirekte bevis: Vi vil bevise det logisk ekvivalente utsagnet $\neg q \to \neg p$. Dette er det samme som å bevise at hvis n^2 er et oddetall så er n et oddetall: At n^2 er et oddetall er det samme som at det finnes et heltall k slik at $n^2 = 2k + 1$. Dette kan skrives om som $n^2 - 1 = 2k$. $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, så vi har $(n-1)(n+1) = 2k$. Siden 2 er en faktor på høyre side så må 2 være en faktor på venstre side også. Dermed må enten $n-1$ eller $n+1$ være partall. Dermed er n et oddetall.

c) Et bevis ved selvmotsigelse. Vi har at n er et partall. Anta at n^2 er et oddetall. Vi har allerede sett at dette medfører at n er et oddetall, men dette er en selvmotsigelse siden vi vet at n er et partall.

1-5-36

Hvis n er et heltall kan vi skrive $n = d_r d_{r-1} \ldots d_1$ der d_i er desimalene til n. Dermed er $n = d_r d_{r-1} \ldots d_2 0 + d_1$. Det første tallet i summen er delelig med 10 (det slutter på null) og det andre tallet i summen ligger mellom null og ni (inklusiv disse). Dermed kan vi skrive $n = 10k + l$ der k er et heltall og $l \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dermed får vi $n^2 = (10k + l)^2 = 100k^2 + 10 \cdot 2kl + l^2$. De to første tallene i denne summen ender begge på null, så det er det siste sifferet i l^2 som bestemmer hva det siste sifferet i n^2 er. $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$. Fra dette ser vi at de eneste mulighetene for det siste sifferet i n^2 er 0, 1, 4, 5, 6 og 9.

2-2-27
At $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ betyr at det finnes positive konstanter C_1, k_1, C_2, k_2 slik at $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ for alle $x > k_1$ og $|f(x)| \geq C_2|g(x)|$ for alle $x > k_2$.

Dermed har vi at $C_2|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_1|g(x)|$ for alle $x > k = \max(k_1, k_2)$.

På den annen side, hvis det finnes positive konstanter C_1, C_2, k, slik at $C_2|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_1|g(x)|$ for alle $x > k$, så får vi at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ ved å sette $k_1 = k_2 = k$.

2-2-28
a) Vi kan *for eksempel* ta $C_1 = 1,\ C_2 = 2$ og $k = 1$. Når $x > 1$ har vi nemlig at $x^2 = x \cdot x > x,\ x^2 > 1,\ x > 0$ og $1 > 0$. Dermed har vi, når $x > 1$,

$$C_1(3x^2) = 3x^2 < 3x^2+x+1 < 3x^2+x^2+x^2 < 3x^2+3x^2 < 2(3x^2) = C_2(3x^2).$$

b) I grafen under er $3x^2 + x + 1$ kurven som ikke starter i origo. Vi ser at etter en stund (litt før $x = 1$) blir denne kurven liggende mellom de to andre (den ene av disse er to ganger den andre).

2-4-14
$100! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 98 \cdot 99 \cdot 100$. Vi får en null på enden av et tall for hver faktor av $10 = 2 \cdot 5$ tallet har. 100! har flere faktorer av 2 enn av 5, så antall faktorer av 10 er lik antall faktorer av 5. Hvert av de 20 tallene 5, 10, 15, ..., 100 tilfører en faktor av 5 til 100!. I tillegg tilfører de 4 tallene 25, 50, 75 og 100 en ekstra faktor av 5. Dermed har vi 24 faktorer av 5 i 100!, så 100! har nøyaktig 24 0-tall til slutt.

2-4-16
To heltall a, b er relativt primiske dersom $\gcd(a, b) = 1$. Vi har at $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, og det er en enkel sak å sjekke at opp til tallet 12 er det kun tallene 1,5,7 og 11 som ikke har noen felles faktor (bortsett fra 1) med 12, og dermed er relativt primiske til tallet 12.

2-4-18
a) $21 = 3 \cdot 7$, $34 = 2 \cdot 17$, $55 = 5 \cdot 11$. Siden ingen av tallene har felles faktor, er alle innbyrdes relativt primiske, så tallene er parvis relativt primiske. Det samme gjelder for resten av oppgaven bortsett fra b)

b) $14 = 2 \cdot 7$, 17 er et primtall, $85 = 5 \cdot 17$ 17 og 85 er dermed ikke relativt primiske, så tallene er ikke parvis relativt primiske.

c) $25 = 5^2$, 41 er et primtall, $49 = 7^2$, $64 = 2^6$

d) 17 er et primtall, $18 = 2 \cdot 3^2$, 19 er et primtall, 23 er et primtall

2-4-20
a) Bortsett fra seg selv, har tallet 6 de positive divisorene 1, 2 og 3. Siden 1+2+3=6 så er tallet 6 perfekt. Tilsvarende har vi 1+2+4+7+14=28, så tallet 28 er perfekt.

b) Vi må finne alle ekte divisorer av $2^{p-1}(2^p-1)$. Vi har ihvertfall $1, 2, 2^2, ..., 2^{p-1}$ som divisorer. Summen av disse er $1+2+2^2+...+2^{p-1} = \sum_{n=0}^{p-1} 2^n = \frac{2^p-1}{2-1} = 2^p - 1$ (sum av en geometrisk rekke, se teorem 1, side 231 i Rosen 5. utgave). Vi har også at hver av disse divisorene multiplisert med $2^p - 1$ er en divisor, og alle bortsett fra den siste er ekte (mindre enn tallet selv). Bidraget fra disse divisorene er $(2^p - 1)\sum_{n=0}^{p-2} 2^n = (2^p - 1)(2^{p-1} - 1)$. Det finnes ikke flere divisorer. Dermed er summen av divisorene: $(2^p - 1) + (2^p - 1)(2^{p-1} - 1) = (2^p - 1)(1 + 2^{p-1} - 1) = (2^p - 1)2^{p-1}$, som er tallet vi startet med. Dermed er dette tallet perfekt.

2-4-21
a **mod** $m = b$ **mod** m er et tall, la oss kalle det r. Da har vi at det finnes heltall q_1 og q_2 slik at $a = q_1 m + r$ og $b = q_2 m + r$. Fra dette får vi at

$$a - b = q_1 m + r - (q_2 m + r) = m(q_1 - q_2).$$

Dermed har vi at m deler $a - b$, altså er $a \equiv b \pmod{m}$.