Løsningsforslag Øving 6
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

Kont. 1999 - 4.
48 er kongruent med -2 og 45 er kongruent med -5, modulo 25. Derfor kan vi i stedet løse ligningene

$$
\begin{aligned}
-2x - 3y &\equiv 1 \pmod{25} \quad (1)\\
3x - 5y &\equiv 3 \pmod{25} \quad (2)
\end{aligned}
$$

Legger vi den nederste av disse til den øverste, får vi $x \equiv 4 + 8y \pmod{25}$. Setter vi dette inn i den andre ligningen over får vi $19y \equiv -9 \pmod{25}$. 4 er en invers til 19 modulo 25, så vi ser at y må være kongruent med -36 modulo 25, m.a.o. kongruent med 14 modulo 25. Setter vi dette inn i en av ligningene over ser vi at x må være kongruent med 16 modulo 25. Dermed har vi

$$
\begin{aligned}
x &= 16 + 25k \qquad k \in \mathbb{Z} \quad (3)\\
y &= 14 + 25l \qquad l \in \mathbb{Z} \quad (4)
\end{aligned}
$$

er alle løsninger for (x, y).

For en løsning (x, y) får vi at $x+y = 16+25k+14+25l = 30+25s, \quad s \in \mathbb{Z}$. For at $x + y$ skal være mellom 120 og 150 krever dette at s er 4, og for at x og y skal være positive må k og l være positive eller null. Dette gir følgende muligheter.

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= (16, 114) \quad (5)\\
(x, y) &= (41, 89) \quad (6)\\
(x, y) &= (66, 64) \quad (7)\\
(x, y) &= (91, 39) \quad (8)\\
(x, y) &= (116, 14) \quad (9)
\end{aligned}
$$

Kont. 1999 - 10.
17 deler ikke 70, så Fermats lille setning forteller oss at $70^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Dermed er $70^{5842} \equiv (70^{16})^{365} 70^2 \equiv 70^2 \equiv 4900 \equiv 4 \pmod{17}$. Siden 3 er felles faktor over alt i den andre ligningen (gjør detaljene selv) kan vi nå i stedet løse ligniningssettet

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 4 \pmod{17} \quad (10)\\
x &\equiv 3 \pmod{4} \quad (11)
\end{aligned}
$$

Vi bruker løsningsmetoden vår fra den kinesiske restsetningen; finn x_1 og x_2 slik at

$$x_1 \equiv 4 \pmod{17} \quad (12)$$
$$x_1 \equiv 0 \pmod{4} \quad (13)$$

$$x_2 \equiv 0 \pmod{17} \quad (14)$$
$$x_2 \equiv 3 \pmod{4} \quad (15)$$

Dermed vil $x = x_1 + x_2$ være en løsning. Siden 4 er kongruent med 0 modulo 4 ser vi med en gang at vi kan ta $x_1 = 4$. På den annen side er 17 kongruent med 1 modulo 4, slik at $x_2 = 3 \cdot 17 = 51$ vil også passe. Den kinesiske restsetningen forteller oss nå at $x = 55 + 68k,\ k \in \mathbb{Z}$ er alle løsninger til ligningssettet ($68 = 17 \cdot 4$). Dermed er det to løsninger som tilfredsstiller alle kravene, nemlig $x = 123$ og $x = 191$.

Kont. 2001 - 2.
a)

$$2970 = 293 \cdot 10 + 40 \quad (16)$$
$$293 = 40 \cdot 7 + 13 \quad (17)$$
$$40 = 13 \cdot 3 + 1 \quad (18)$$

$$1 = 40 - 13 \cdot 3 \quad (19)$$
$$= 40 - 3 \cdot (293 - 40 \cdot 7) = 22 \cdot 40 - 3 \cdot 293 \quad (20)$$
$$= 22(2970 - 10 \cdot 293) - 3 \cdot 293 = 22 \cdot 2970 - 223 \cdot 293. \quad (21)$$

At x er en invers til 293 modulo 2970 medfører at x er en del av en løsning til $293x - 2970k = 1$. Vi ser dermed at -223 er en invers til 293 modulo 2970.

b) Fermats lille setning gir oss at $2^{1621} \equiv 2^5 \equiv 32 \equiv -2 \pmod{17}$ og $3^{1804} \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 5 \pmod{19}$.

Dermed kan vi i stedet løse ligningssettet

$$n \equiv 5 \pmod{17} \quad (22)$$
$$n \equiv -3 \pmod{19}. \quad (23)$$

9 er en invers til 19 modulo 17, og 9 er en invers til 17 modulo 19, så $n = 19 \cdot 9 \cdot 5 - 17 \cdot 9 \cdot 3 + 323k = 396 + 323k,\ k \in \mathbb{Z}$. Dermed er den

minste positive løsningen $n = 73$.

Kont. 2001 - 3.
La N være mengden av heltall mellom 1 og 2001 som er delelige med ni, E mengden av heltall mellom 1 og 2001 delelige med elleve og F mengden av heltall mellom 1 og 2001 delelige med femten. Vi skal da finne kardinaliteten til mengden $N \cup E \cup F$. Hvis vi legger sammen kardinaliteten til hver av de tre mengdene har vi talt opp tallene i $N \cap E$, $N \cap F$ og $E \cap F$ to ganger. Hvis nå trekker fra kardinaliteten til disse snittene har vi talt alt en gang, bortsett fra tallene i $N \cap E \cap F$, som har blitt lagt til tre ganger og deretter trukket fra tre ganger. Dermed har vi

$$|N \cup E \cup F| = |N| + |E| + |F| - |N \cap E| - |N \cap F| - |E \cap F| + |N \cap E \cap F|.$$

9 går opp 222 ganger i 2001, 11 går opp 181 ganger og 15 går opp 133 ganger. $N \cap E$ består av tall mellom 1 og 2001 som er delelige med både 9 og 11, m.a.o. tall som er delelige med 99. 99 går opp 20 ganger i 2001. Tilsvarende får vi at $|N \cap F| = 44$ og $|E \cap F| = 12$. (Minste felles multiplum til 9 og 15 er 45, ikke 135.) Et tall som er delelig med 9, 11 og 15 er delelig med 495 (minste felles multiplum til disse tallene) så $|N \cap E \cap F| = 4$ siden 495 går opp fire ganger i 2001.

Dermed har vi at $|N \cup E \cup F| = 222 + 181 + 133 - 20 - 44 - 12 + 4 = 464$. M.a.o.: Det er 464 tall mellom 1 og 2001 som er delelige med minst ett av tallene 9, 11 eller 15.

3.3.62
Først sjekker vi at påstanden er sann for n=1: $4^{1+1} + 5^{2\cdot 1-1} = 16 + 5 = 21$, som er delelig på 21. Så antar vi at påstanden er sann for $n = k$, dvs. at $4^{k+1} + 5^{2k-1}$ er delelig på 21, og viser at dette fører til at påstanden er sann for $n = k + 1$. Vi har at

$$\begin{aligned} 4^{(k+1)+1} + 5^{2(k+1)-1} &= 4 \cdot 4^{k+1} + 25 \cdot 5^{2k-1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + (4 + 21) \cdot 5^{2k-1} \\ &= 4(4^{k+1} + 5^{2k-1}) + 21 \cdot 5^{2k+1}. \end{aligned}$$

Vi ser at uttrykket i parantes i siste linje er delelig på 21 ved den induktive hypotesen, og siden det andre leddet åpenbart også er delelig på 21, er hele uttrykket delelig på 21. Dermed er påstanden sann.

3.4.44
For base-steget sjekker vi treet med kun en rot. Her har vi kun ett blad

og ingen indre hjørner, så $l(T) = i(T) + 1$ holder. For det rekursive steget, anta at ligningen holder for T_1 og T_2. Vi vil vise at ligningen holder for $T = T_1 \cdot T_2$. Roten til vårt nye tre T er et indre hjørne i T, og ethvert indre hjørne i T_1 og T_2 er indre hjørner i T, så $i(T) = i(T_1) + i(T_2) + 1$. Bladene til T er bladene til T_1 og T_2, så $l(T) = l(T_1) + l(T_2)$. Dermed har vi $l(T) = l(T_1) + l(T_2) = i(T_1) + 1 + i(T_2) + 1$ ved vår induktive hypotese, så $l(T) = (i(T_1) + i(T_2) + 1) + 1 = i(T) + 1$, og dermed er påstanden bevist.

3.4.48
a) $A(1, 0) = 0$ ved den andre linjen av definisjonen.
b) $A(0, 1) = 2$ ved den første linjen av definisjonen.
c) $A(1, 1) = 2$ ved den tredje linjen av definisjonen.
d) $A(2, 2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 2) = 4$

3.4.57
Med veldefinert mener vi her kun at funksjonsverdien kan finnes for alle positive heltall. $F(0)$ er veldefinert siden $F(0)$ er gitt. Vi antar at $F(k)$ er veldefinert for alle positive heltall mindre enn eller lik n. Da er $F(n + 1)$ veldefinert siden verdien er gitt ved $F(0), F(1), ..., F(n)$. Dermed er F veldefinert for alle positive heltall.