Løsningsforslag Øving 7
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

2-1-9
prosedyre palindromsjekk ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: streng)
$svar$:=**sann**
for $i := 1$ **to** $\lfloor n/2 \rfloor$
  if $a_i \neq a_{n+1-i}$ **then** $svar$:=**usann**
{svaret er sant hvis og bare hvis strengen er et palindrom.}

2-1-20
prosedyre maks-min ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: heltall)
$maks := a_1$
$min := a_1$
for $i := 2$ **to** n
  if $maks < a_i$ **then** $maks := a_i$
  else if $min > a_i$ **then** $min := a_i$
{ min er det minste tallet og $maks$ er det største}

6-1-10
a) Beløpet etter $n-1$ år ganges med 1.09 for å få beløpet etter n år, siden 9% av beløpet legges til hvert år pga. renten. Dermed har vi $a_n = 1.09a_{n-1}$. Initialbetingelsen er $a_0 = 1000$.

b) Siden vi ganger med 1.09 hvert år, er løsningen $a_n = 1000 \cdot 1.09^n$.

c) $a_{100} = 1000 \cdot 1.09^{100} \approx \$5\ 529\ 041$.

6-1-18
a) La s_n være antall måter en mengde av n elementer kan sorteres. Det er n forskjellige elementer som kan komme først. Når vi vet hvilket element som kommer først, er det $n-1$ elementer igjen å sortere. Dermed er det s_{n-1} muligheter for hvert valg av første element, så vi har $s_n = ns_{n-1}$. Vi har også initialbetingelsen $s_1 = 1$ fordi det bare er en måte å sortere en mengde med ett element.

b) $s_1 = 1,\ s_2 = 2 \cdot 1,\ s_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1, \ldots s_n = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

6-1-29
a) La a_n være antallet strenger av lengde n som ikke har to etterfølgende

0-er. For å konstruere en slik streng kan vi enten starte med tallet 1 eller 2 og henge på en streng som ikke inneholder 2 etterfølgende 0-tall (dette kan gjøres på $2a_{n-1}$ måter), eller vi kan starte med 01 eller 02 og henge på en streng som ikke inneholder to etterfølgende 0-tall (dette kan gjøres på $2a_{n-2}$ måter). Dermed har vi følgende rekurensrelasjon, gyldig for $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

b) Vi har $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

c) Vi beregner a_2 til a_6 ved hjelp av rekurensrelasjonen:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 2a_1 + 2a_0 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8 \\
a_3 &= 2a_2 + 2a_1 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 22 \\
a_4 &= 2a_3 + 2a_2 = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 8 = 60 \\
a_5 &= 2a_4 + 2a_3 = 2 \cdot 60 + 2 \cdot 22 = 164 \\
a_6 &= 2a_5 + 2a_4 = 2 \cdot 164 + 2 \cdot 60 = 448
\end{aligned}
$$

Dermed er det 448 strenger av lengde 6 som ikke inneholder to etterfølgende 0-tall.

6-1-30

a) La a_n være antallet strenger av lengde n med to etterfølgende 0-er. For å konstruere en slik streng kan vi enten starte med tallet 1 eller 2 og henge på en streng som inneholder 2 etterfølgende 0-tall (dette kan gjøres på $2a_{n-1}$ måter), eller vi kan starte med 01 eller 02 og henge på en streng som inneholder to etterfølgende 0-tall (dette kan gjøres på $2a_{n-2}$ måter), eller vi kan starte med 00 og henge på en vilkårlig streng av lengde $n-2$ (dette kan gjøres på 3^{n-2} måter). Derfor har vi følgende rekurensrelasjon, gyldig for $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3^{n-2}$.

b) Vi har at $a_0 = a_1 = 0$.

c) Vi beregner a_2 til a_6 ved hjelp av rekurensrelasjonen:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 2a_1 + 2a_0 + 3^0 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\
a_3 &= 2a_2 + 2a_1 + 3^1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 = 5 \\
a_4 &= 2a_3 + 2a_2 + 3^2 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 9 = 21 \\
a_5 &= 2a_4 + 2a_3 + 3^3 = 2 \cdot 21 + 2 \cdot 5 + 27 = 79 \\
a_6 &= 2a_5 + 2a_4 + 3^4 = 2 \cdot 79 + 2 \cdot 21 + 81 = 281
\end{aligned}
$$

Dermed er det 281 strenger av lengde 6 som inneholder to etterfølgende 0-tall.

6-1-40

La a_n være antallet følger av lengde n med et like antall 0-er. Vi har da $2^n - a_n$ følger av lengde n med et odde antall 0-er. Det er to måter vi kan få en følge av lengde n med et like antall 0. Den kan begynne med 1 og bli fulgt av en streng av lengde $n-1$ med et like antall 0 (det er a_{n-1} av disse), eller den kan begynne med 0 og bli fulgt av en streng av lengde $n-1$ med et odde antall 0 (det er $2^{n-1} - a_{n-1}$ av disse). Dermed er $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} - a_{n-1} = 2^{n-1}$. Se også oppgave 31 i kapittel 4.4.

6-2-4

a) Vi løser først den karakteristiske ligningen $r^2 - r - 6 = 0$. Røttene er $r = -2$ og $r = 3$. Dermed er løsningen på formen $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$. Initialbetingelsene gir oss

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 6 &= -2\alpha_1 + 3\alpha_2. \end{aligned}$$

Løsningene er $\alpha_1 = 3/5,\ \alpha_2 = 12/5$. Dermed er løsningen til rekurensrelasjonen $a_n = (3/5)(-2)^n + (12/5)3^n$.

6-2-11

a) Vi viser formelen ved induksjon. For det induktive steget trenger vi at formelen er sann to steg tilbake, så for basesteget sjekker vi at formelen holder for $n = 2, 3$. For $n = 2$ har vi: $L_2 = L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3$, $L_2 = f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3$, og for $n = 3$ har vi $L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 1 = 4$, $L_3 = f_2 + f_4 = 1 + 3 = 4$ så formelen holder for $n = 2, 3$. For det induktive steget, anta at formelen holder for $n = k, k-1$. Da er $L_{k+1} = L_k + L_{k-1} = f_{k-1} + f_{k+1} + f_{k-2} + f_k = (f_{k-1} + f_{k-2}) + (f_{k+1} + f_k) = f_k + f_{k+2}$. Så formelen holder også får $k+1$, dermed holder formelen for alle $n \geq 2$.

b) Røtter av den karakteristiske ligningen $r^2 - r - 1 = 0$ er $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ og $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Dermed er Lucastallene gitt ved

$$L_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Vi bruker initialbetingelsene til å bestemme konstantene α_1 og α_2

$$\begin{aligned} L_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \\ L_1 &= \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Løsningen til disse ligningene er $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Dermed er Lucastallene gitt ved

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

6-2-18
Den karakteristiske ligningen er $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$. Denne har rot $r = 2$, med multiplisitet 3, så den generelle løsningen er $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n + \alpha_3 n^2 2^n$. Vi bruker nå initialbetingelsene for å bestemme konstantene

$$\begin{aligned} a_0 &= -5 = \alpha_1, \\ a_1 &= 4 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ a_2 &= 88 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 16\alpha_3. \end{aligned}$$

Dette gir oss $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 13/2$. Dermed er løsningen $a_n = -5 \cdot 2^n + (n/2) \cdot 2^n + (13n^2/2) \cdot 2^n = -5 \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1} + 13n^2 \cdot 2^{n-1}$.

7-1-4
a) Relasjonen er ikke refleksiv (a er ikke høyere enn seg selv), ikke symmetrisk (a er høyere enn b, men b er ikke høyere enn a). Den er antisymmetrisk (hvis a er høyere enn b, så er ikke b høyere enn a). Den er transitiv (hvis a er høyere enn b og b er høyere enn c, så er a høyere enn c).
b) Relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Den er ikke antisymmetrisk.
c) Essensielt samme oppgave som **b)**.
d) Relasjonen er refleksiv og symmetrisk. Den er ikke antisymmetrisk, siden a og b kan være to forskjellig personer med en felles besteforelder, og da har også b og a samme besteforelder. Relasjonen er ikke transitiv, siden a og b kan ha en felles besteforelder, b og c kan ha en felles besteforelder, men dette trenger ikke bety at a og c har en felles besteforelder.

7-1-6
a) Relasjonen er ikke refleksiv, siden $1 + 1 \neq 0$. Relasjonen er symmetrisk, siden $x + y = 0$ hvis og bare hvis $y + x = 0$. Den er ikke antisymmetrisk, siden $(1, -1)$ og $(-1, 1)$ begge er i R. Den er ikke transitiv, siden $(1, -1)$ og $(-1, 1)$ er i R, men $(1, 1)$ er ikke i R.
b) Siden $x = \pm x$ (ved å velge plusstegnet) er relasjonen refleksiv. Siden $x = \pm y$ hvis og bare hvis $y = \pm x$, så er relasjonen symmetrisk. Siden $(1, -1)$ og $(-1, 1)$ begge er i R, så er relasjonen ikke antisymmetrisk. Relasjonen er transitiv.

c) Relasjonen er refleksiv, siden $x - x = 0$ er rasjonal. Relasjonen er symmetrisk, siden hvis $x - y$ er rasjonal så er $-(x - y) = y - x$ rasjonal. Siden $(1, -1)$ og $(-1, 1)$ begge er i R, så er relasjonen ikke antisymmetrisk. At $x-y$ og $y - z$ er rasjonale medfører at deres sum $x - z$ er rasjonal, så relasjonen er transitiv.
d) Siden $1 \neq 2 \cdot 1$ er relasjonen ikke refleksiv. Den er ikke symmetrisk, siden $(2, 1) \in R$, men $(1, 2) \notin R$. Den er antisymmetrisk, men ikke transitiv.
e) Relasjonen er refleksiv, symmetrisk, ikke antisymmetrisk og ikke transitiv.
f) Relasjonen er ikke refleksiv, den er symmetrisk, ikke antisymmetrisk og ikke transitiv.
g) Relasjonen er ikke refleksiv, ikke symetrisk, den er antisymmetrisk og transitiv.
h) Relasjonen er ikke refleksiv, den er symmetrisk, ikke antisymmetrisk og ikke transitiv.