Løsningsforslag Øving 8
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

7.1.40 og 7.1.42

Denne tabellen besvarer både 7.1.40 og 7.1.42. Antall forskjellige relasjoner på $\{0,1\}$ er lik antall forskjellige delmengder av $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Disse er gitt i tabellen under. I tillegg er egenskapene spurt etter i 7.1.42 gitt av tabellen.

R	00	01	10	11	Refl.	Irr.	Sym.	Anti.	Asym.	Trans.
0	0	0	0	0		*	*	*	*	*
1	0	0	0	1			*	*		*
2	0	0	1	0		*		*	*	*
3	0	0	1	1				*		*
4	0	1	0	0		*		*	*	*
5	0	1	0	1				*		*
6	0	1	1	0		*	*			
7	0	1	1	1			*			
8	1	0	0	0			*	*		*
9	1	0	0	1	*		*	*		*
10	1	0	1	0				*		*
11	1	0	1	1	*			*		*
12	1	1	0	0				*		*
13	1	1	0	1	*			*		*
14	1	1	1	0			*			
15	1	1	1	1	*		*			*

7.1.54

La $A = \{1,2,3,4,5\}$.
$R^2 = A \times A - \{(2\ 3),(4\ 5)\}$
$R^3 = R^4 = R^5 = A \times A$.

7.1.56

Vi viser utsagnet ved induksjon. Det er ingenting å vise for basesteget $n = 1$. Anta at R^n er symmetrisk, og la $(a,c) \in R^{n+1} = R^n \circ R$. Da finnes det en b slik at $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R^n$. Siden R^n og R er symmetrisk, har vi $(b,a) \in R$ og $(c,b) \in R^n$. Dermed er $(c,a) \in R \circ R^n$. Vi vil ha fullført beviset hvis vi kan vise at $R \circ R^n = R^{n+1}$. Først, merk at sammensetning av relasjoner er assosiativ, dvs. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. (Beviset for dette er rettfrem anvendelse av definisjonen.) Så viser vi at $R \circ R^n = R^{n+1}$ ved induksjon. Igjen er basesteget gitt. Ved å anvende den induktive hypotesen har vi $R \circ R^{k+1} = R \circ (R^k \circ R) = (R \circ R^k) \circ R = R^{k+1} \circ R = R^{k+2}$ som ønsket.

7.2.16
Den nye tabellen vil bestå av kolonne 1, 2 og 4 fra Tabell 8. Siden ingen av de nye radene er like, beholder vi alle radene.

7.3.14
a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7.3.15
a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7.3.17
$\mathbf{M}_{\bar{R}}$ vil ha 1-ere nettopp i de posisjonene det er 0-ere i $\mathbf{M}_R$. Siden det totalt er n^2 posisjoner, vil antall 1-ere i $\mathbf{M}_{\bar{R}}$ være $n^2 - k$.

7.4.19
Se fasit bak i boken.

7.4.20
a) $(a, b) \in R^2$ hvis og bare hvis det finnes en by c slik at det er et direkte fly fra a til c og et direkte fly fra c til b.
b) $(a, b) \in R^3$ hvis og bare hvis det finnes byer c, d slik at det er et direkte fly fra a til c, et direkte fly fra c til d, og et direkte fly fra d til b.
c) $(a, b) \in R^*$ hvis og bare hvis det er mulig å fly fra a til b (ikke nødvendigvis direkte).

7.4.22
Siden R^* er en utvidelse av den refleksive relasjonen R, må også R^* være refleksiv.

7.4.23
I 7.1.56 viste vi at R^n er symmetrisk. Siden $R^* = \cup_{n=1}^{\infty} R^n$, følger det at R^*

er symmetrisk.

7.4.27
Vi beregner matrisene $\mathbf{W}_i$ for $i = 0, 1, 2, 3, 4$, og så er $\mathbf{W}_4$ svaret.

a) $\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2$

$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_3 = \mathbf{W}_4$

d) $\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7.5.3
a) Relasjonen er en ekvivalensrelasjon.
b) Relasjonen er refleksiv og symmetrisk, men ikke transitiv. Det finnes f, g, h slik at $f(0) = g(0)$, $g(1) = h(1)$, men $f(0) \neq h(0)$, $f(1) \neq h(1)$.
c) Relasjonen er verken refleksiv, symmetrisk eller transitiv.
d) Relasjonen er en ekvivalensrelasjon.
e) Relasjonen er ikke refleksiv og ikke transitiv. Den er symmetrisk.

7.5.10

1. R er refleksiv. $((a, b), (a, b)) \in R$, siden $ab = ba$.
2. R er symmetrisk. $(((a, b), (c, d)) \in R) \rightarrow (((c, d), (a, b)) \in R)$, siden $(ad = bc) \rightarrow (cb = da)$.
3. Relasjonen er transitiv. Anta at $((a, b), (c, d)) \in R$ og $((c, d), (e, f)) \in R$, det vil si $ad = bc$ og $cf = de$. Herav følger at $adcf = bcde$. Vi ser at begge disse tallene er delelige med $cd \neq 0$, og når vi deler med cd får vi $af = be$ som betyr at $((a, b), (e, f)) \in R$.