Løsningsforslag Øving 9
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

7.4.29
a) Anta at relasjonen er definert på mengden $\{1,2,3,4\}$. For at relasjonen skal være refleksiv må den inneholde alle diagonalelementene. Den refleksive tillukningen av R er altså $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$. Siden $(4,1)$ og $(1,2)$ er med i R må vi legge til $(4,2)$ pga. transitivitet. Vi har nå relasjonen $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$, som er transitiv (sjekk alle muligheter for å danne nye par!) og refleksiv.

b) Først legger vi til elementer for å få den symmetriske tillukningen av R. Da får vi $\{(1,2),(1,4),(2,1),(3,3),(4,1)\}$. For at denne relasjonen skal bli transitiv må vi legge til $\{(1,1),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$. Den nye relasjonen $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$ er nå symmetrisk og transitiv (sjekk selv systematisk at dette stemmer!).

c) Siden relasjonen vi fant i **b)** også er refleksiv, får vi samme svar her.

7.5.18
a) Siden relasjonen ikke er symmetrisk, er den ikke en ekvivalensrelasjon.

b) Dette er en ekvivalensrelasjon (sjekk at alle kravene er oppfylt!). Ekvivalensklassene er $[1] = \{1,3\}$ og $[2] = \{2,4\}$.

c) Dette er en ekvivalensrelasjon (sjekk at alle kravene er oppfylt!). Ekvivalensklassene er $[1] = \{1,2,3\}$ og $[4] = \{4\}$.

7.5.42
a) $R_1 \cup R_2$ vil som regel ikke være transitiv.
Eksempel: La $A = \{1,2,3\}$ og anta at R_1 er gitt ved partisjonen $\{\{1,2\},\{3\}\}$ og at R_2 er gitt ved partisjonen $\{\{1\},\{2,3\}\}$. Da er både $(1,2)$ og $(2,3)$ i $R_1 \cup R_2$, men $(1,3)$ er ikke med i $R_1 \cup R_2$.

b) Snittet er fremdeles refleksivt, siden alle diagonale elementene må være med i både R_1 og R_2. Snittet er fremdeles symmetrisk, siden hvis $(a,b) \in R_1, R_2$ så er også $(b,a) \in R_1, R_2$. Snittet er fremdeles transitivt, siden hvis $(a,b),(b,c) \in R_1, R_2$ så er også $(a,c) \in R_1, R_2$. Dermed er snittet fremdeles en ekvivalensrelasjon.

c) Dette vil aldri være en ekvivalensrelasjon på en ikketom mengde, siden den ikke er refleksiv.

7.5.44
a) R er refleksiv, siden ethvert smykke kan konstrueres av seg selv ved en 360-graders (0-graders) rotasjon. R er symmetrisk, siden hvis B_2 kan konstrueres av B_1, så kan B_1 konstrueres av B_2 (ved å utføre stegene baklengs). R er transitiv, siden hvis B_2 kan konstrueres av B_1, og B_3 kan konstrueres av B_2 så kan B_3 konstrueres av B_1 (ved først å utføre operasjoner som lager B_2 og så utføre operasjoner som lager B_3). Dermed er R en ekvivalensrelasjon.

b) Smykker i samme ekvivalensklasse er smykker som kan konstrueres av hverandre. Hvis vi benevner smykkene ved fargen på kulene, så kan hver klasse representeres ved RRR, HHH, BBB, RRV, RRB, VVR, VVB, BBR, BBV, og RVB. Merk at når vi har spesifisert fargene, så er ethvert smykke med disse fargene ekvivalent (kan konstrueres ved rotasjoner og refleksjoner). Dette ville ikke vært sant for et smykke med fire eller flere kuler.

7.6.4
Dersom kanten fra d til b hadde gått den andre veien ville relasjonen ha vært både refleksiv, antisymmetrisk og transitiv, altså en delvis ordning. Denne relasjonen er refleksiv, fordi alle sløyfene er med, den er antisymmetrisk fordi det ikke finnes noe par av hjørner som er forbundet begge veier, Den er ikke transitiv fordi det mangler en kant fra c til b. Dersom vi hadde føyd til denne kanten ville vi fått den totale ordningen $a < c < d < b$.

7.6.26
a) De maksimale elementene er de med ingen andre elementer over seg, nemlig l, m.
b) De minimale elementene er de med ingen andre elementer under seg, nemlig a, b, c.
c) Det finnes ikke noe største element, siden verken l eller m er større enn den andre.
d) Det finnes ikke noe minste element, siden verken a eller b er mindre enn den andre.
e) Vi må finne elementer slik at det finnes nedadstigende veier til både a, b, og c. Det er klart at k, l, m er disse elementene.
f) Siden k er mindre enn både l og m, er k den laveste øvre grensen for a, b, c.
g) Ikke noe element er mindre enn både f og h, så det finnes ikke noen nedre grense.
h) Siden det ikke finnes noen nedre grense, kan det ikke finnes noen største

nedre grense.

7.6.30
a) Et eksempel er de naturlige tall med relasjonen "er mindre enn eller lik". Her er 1 et minimalt element, og det finnes ingen maksimale element.

b) Et eksempel er de naturlige tall med relasjonen "er større enn eller lik". Her er 1 et maksimalt element, og det finnes ingen minimale element.

c) Et eksempel er heltallene med relasjonen "er mindre enn eller lik". Her finnes det verken maksimale eller minimale element.

7.6.40
Den minste øvre grensen for to elementer av S under R er den største nedre grensen for de samme elementene under R^{-1}. Derfor, hvis (S, R) er et "lattice" (dvs. alle minste øvre og største nedre grenser finnes), så er også (S, R^{-1}) et "lattice".

7.6.42
Vi må sjekke at egenskapene til et "lattice" er oppfylt. Først må vi vise at S er delvis ordnet under relasjonen $\preceq$. Vi har refleksivitet, siden $(A, C) \preceq (A, C)$ fordi $A \leq A$ og $C \subseteq C$. Så sjekker vi antisymmetri. Anta at $(A_1, C_1) \preceq (A_2, C_2)$ og $(A_2, C_2) \preceq (A_1, C_1)$. Dette betyr at $A_1 \leq A_2$, $C_1 \subseteq C_2$, $A_2 \leq A_1$ og $C_2 \subseteq C_1$. Dermed er $A_1 = A_2$ og $C_1 = C_2$, så $(A_1, C_1) = (A_2, C_2)$. Transitivitet sjekkes tilsvarende, ved å bruke at $\leq$ og $\subseteq$ er transitive. Dermed er $(S, \preceq)$ delvis ordnet.

Så må vi vise at største nedre grense og minste øvre grense finnes. Anta (A_1, C_1) og (A_2, C_2) er elementer i S. Vi hevder at $(\min(A_1, A_2), C_1 \cap C_2)$ er deres største nedre grense. Det er klart at $\min(A_1, A_2) \leq A_1, A_2$ og $C_1 \cap C_2 \subseteq C_1, C_2$, så $(\min(A_1, A_2), C_1 \cap C_2) \preceq (A_1, C_1), (A_2, C_2)$, så dette er en nedre grense. Vi har også at hvis (A, C) er en (hvilkensomhelst) nedre grense, så er $A \leq A_1, A_2$ og $C \subseteq C_1, C_2$. Det følger at $A \leq \min(A_1, A_2)$ og $C \subseteq C_1 \cap C_2$. Dermed er $(A, C) \preceq (\min(A_1, A_2), C_1 \cap C_2)$. Dette betyr at $(\min(A_1, A_2), C_1 \cap C_2)$ er største nedre grense. Beviset for at $(\max(A_1, A_2), C_1 \cup C_2)$ er minste øvre grense følger tilsvarende.

8.1.11
Se fasit bak i boken.

8.2.24
Merk at grafene det spørres etter er gitt i Eksempel 4-7.

a) K_1 har ikke nok hjørner til å være bipartit. K_2 er åpenbart bipartit. For $n \geq 3$ er K_n ikke bipartit, siden hvis hvis hjørnene deles inn i to disjunkte mengder må minst en av mengdene inneholde minst to hjørner, og disse hjørnene vil i dette tilfellet ha en kant mellom seg.

b) For at C_n skal være definert trenger vi $n \geq 3$. Hvis n er like er C_n bipartit, siden den ene delen kan bestå av annethvert hjørne. Hvis n er odde er C_n ikke bipartit.

c) W_n er aldri bipartit. (Merk at hvis en graf inneholder triangler, kan den ikke være bipartit).

d) Q_n er alltid bipartit, siden vi kan dele hjørnene inn i to mengder, de med strenger med et odde antall 1-ere, og de med et like antall 1-ere. Det er da ikke mulig å ha en kant mellom hjørner i samme klasse, siden hjørnene i samme klasse representerer strenger som ikke kan være ulike i nøyaktig en posisjon.

8.2.35
a) Grafen er regulær for alle $n \geq 1$.
b) Grafen er regulær for alle $n \geq 3$.
c) Grafen er regulær for $n = 3$.
d) Grafen er regulær for alle $n \geq 0$.

8.2.36
Siden hjørnene i den ene delen har grad m, og hjørnene i den andre delen har grad n, konkluderer vi at $K_{m,n}$ er regulær hvis og bare hvis $m = n$.

8.2.37
Ved håndhilse-teoremet har vi $2e = 4v$, der v betegner antall hjørner, og e antall kanter. Med $e = 10$ får vi $v = 5$, altså må grafen ha 5 hjørner.

8.2.41
a) Grafen med n hjørner og ingen kanter.
b) Den disjunkte union av K_n og K_m.
c) Grafen med hjørner $\{v_1, ..., v_n\}$ med en kant mellom v_i og v_j hvis ikke $i \equiv j \pm 1 \pmod{n}$.
d) Grafen der hjørnene er representert ved binære strenger av lengde n med en kant mellom to hjørner hvis strengene er forskjellige i mer enn en posisjon.