Løsningsforslag Øving 10
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

8.3.2

Hjørne	Tilgrensende hjørne
a	b,d
b	a,d,e
c	d,e
d	a,b,c
e	b,c

8.3.38
Disse to grafene er isomorfe. Hver består av K_4 med et femte hjørnet tilgrensende til to av hjørnene i K_4. Flere isomorfier er mulige. Et eksempel er $f(u_1) = v_1,\ f(u_2) = v_3,\ f(u_3) = v_2,\ f(u_4) = v_5,\ f(u_5) = v_4$.

8.3.40
Disse grafene er ikke isomorfe. En av dem har et hjørne av grad 4 nemlig v_6, og det har ikke den andre.

8.3.43
Merk at kretsen til venstre inneholder to disjunkte 5-kretser, den indre og den ytre. Vi må finne to slike kretser i grafen til høyre også, slik at kantene mellom hjørnene i de to kretsene også bevares. La f.eks. funksjonen fra den ytre kretsen til en 5-krets i grafen til høyre være gitt ved: $f(u_2) = v_2,\ f(u_1) = v_1,\ f(u_5) = v_9,\ f(u_4) = v_{10},\ f(u_3) = v_8$. Så finner vi ved inspeksjon en funksjon fra den indre kretsen til en annen 5-krets i grafen til høyre, slik at vi ikke bruker noen av hjørnene omigjen, og at kantene mellom de to kretsene i grafen til venstre samsvarer med kantene mellom de to kretsene i grafen til høyre: $f(u_9) = v_3,\ f(u_6) = v_4,\ f(u_8) = v_5,\ f(u_{10}) = v_6,\ f(u_7) = v_7$. For å vise at funksjonen virkelig er en isomorfi må vi vise at alle kantene er bevart. La oss sjekke dette med en matrise over tilgrensende hjørner. Først matrisen over grafen til venstre:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
u_1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
u_2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
u_3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
u_4	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
u_5	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
u_6	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
u_7	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
u_8	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
u_9	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
u_{10}	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Så matrisen over grafen til høyre:

	v_1	v_2	v_8	v_{10}	v_9	v_4	v_7	v_5	v_3	v_6
v_1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
v_2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
v_8	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
v_{10}	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
v_9	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
v_7	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
v_3	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
v_6	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Siden matrisene er like, er kantene bevart. Dermed er grafene isomorfe.

8.3.49

Merk hjørnene i rekkefølge slik at alle hjørnene i den første mengden av partisjonen kommer først. Siden ingen kanter går mellom hjørner i samme mengde av partisjonen, vil matrisen ha den ønskede form.

8.4.16

a) Tilgrensende hjørner er i forskjellige deler, så enhver vei mellom de må ha odde lengde. Derfor er det ingen veier av lengde 2.

b) En vei av lengde 3 er spesifisert ved å velge et hjørne i den ene delen som det andre hjørne i veien, og et hjørne i den andre delen som det tredje hjørnet i veien (det første og fjerde hjørnet er de gitte tilgrensende hjørnene). Dermed er det $3 \cdot 3 = 9$ veier av lengde 3 mellom to gitte hjørner.

c) Som i **a)** er svaret 0.

d) Tilsvarende som i del **c)** blir svaret $3^4 = 81$.

8.4.17
a) Hjørner som ikke grenser til hverandre er i samme del. For to gitte hjørner i den ene delen, er det 3 andre hjørner i den andre delen veien kan gå via, så antall veier av lengde 2 er 2.
b) Enhver vei mellom ikke-tilgrensende hjørner må ha like lengde, så antall veier av lengde 3 er 0.
c) Tilsvarende som i del **c)** blir svaret $3^3 = 27$.
d) Som i **b)** blir svaret 0.

8.4.22
Anta at v er et hjørne av odde grad, og H er komponenten av grafen som inneholder v. Da er H selv en graf, så den har et like antall hjørner av odde grad (Teorem 2, seksjon 8.2). Dermed er det et annet hjørne w i H av odde grad, og dermed også en vei mellom v og w.

8.5.21
Grafen har en Eulervei, men ingen Eulerkrets siden den har nøyaktig to hjørner av odde grad. Eulervei: $a, d, e, d, b, a, e, c, e, b, c, b, e$.

8.5.46
La oss først vise at grafen vi får ved å fjerne et hjørne er en Hamiltonkrets. Ved symmetri er det likegyldig hvilket hjørne vi fjerner (hvis dette er mye å svelge, så sjekk evt. at du finner en Hamiltonkrets både ved å fjerne et hjørne fra den ytre kretsen og fra den indre kretsen, og dermed stemmer det for alle hjørner pga. symmetri), så anta at vi fjerner hjørne j. Da har vi følgende Hamiltonkrets i resten av grafen: $a, e, d, i, g, b, c, h, f, a$.

Så viser vi at hele grafen ikke har noen Hamiltonkrets. Anta at det finnes en Hamiltonkrets. Ikke alle kantene i den ytre delen kan brukes, så uten tap av generalitet kan vi anta at $\{c, d\}$ ikke brukes. Da må $\{e, d\}$, $\{d, i\}$, $\{h, c\}$, $\{b, c\}$ alle brukes. Hvis $\{a, f\}$ ikke brukes, så må $\{e, a\}$, $\{a, b\}$, $\{f, i\}$, $\{f, h\}$ alle brukes, dermed dannes en krets som ikke inneholder alle hjørner. Derfor må $\{a, f\}$ brukes. Uten tap av generalitet kan vi anta at $\{e, a\}$ også brukes, og at $\{a, b\}$ ikke brukes. Da brukes også $\{b, g\}$, og $\{e, j\}$ brukes ikke. Men dette krever at $\{g, j\}$ og $\{h, j\}$ brukes, og dermed dannes kretsen b, c, h, j, g, b. Dermed finnes det ikke noen Hamiltonkrets i grafen.

8.5.55
Se fasit i boken.

8.6.26
Følgende tabell viser de 12 forskjellige Hamiltonkretsene og deres vekt.

Krets	Vekt
a-b-c-d-e-a	3+10+6+1+7=27
a-b-c-e-d-a	3+10+5+1+4=23
a-b-d-c-e-a	3+9+6+5+7=30
a-b-d-e-c-a	3+9+1+5+8=26
a-b-e-c-d-a	3+2+5+6+4=20
a-b-e-d-c-a	3+2+1+6+8=20
a-c-b-d-e-a	8+10+9+1+7=35
a-c-b-e-d-a	8+10+2+1+4=25
a-c-d-b-e-a	8+6+9+2+7=32
a-c-e-b-d-a	8+5+2+9+4=28
a-d-b-c-e-a	4+9+10+5+7=35
a-d-c-b-e-a	4+6+10+2+7=29

Dermed ser vi at kretsene $a-b-e-c-d-a$ og $a-b-e-d-c-a$ er kretsene med minst total vekt.

kont-01-4

Nabomatriser må være symmetriske. Det er nøyaktig tre steder i matrisen dette ikke er tilfellet. Kaller vi hjørnene $a,\ b,\ c$ og d ser vi at kanten mellom a og c må være med. De andre kantene som kan være med her er de mellom a og b, mellom a og d og mellom c og d. La oss kalle disse kantene henholdsvis $e,\ f$ og g. For hver av disse kantene som er med endres en null til et ett tall i matrisen, for hver kant som ikke er med endres et ett tall til en null. Her er de mulige grafene: G_1 : legg ikke til noe. G_2 : legg til e. G_3 : legg til f. G_4 : legg til g. G_5 : legg til e og f. G_6 : legg til e og g. G_7 : legg til f og g. G_8 : legg til $e,\ f$ og g. Grafen har ikke en Euler vei kun hvis alle fire hjørnene har odde grad (alle grafer har et like antall hjørner av odde grad, så 1 og 3 er umulig). Dermed har alle utenom G_5 en Euler vei. Dermed er det igjen 7 muligheter for G. Man ser nokså enkelt at G_1, G_6, G_7 og G_8 ikke er isomorf med noen andre, mens G_2, G_3 og G_4 er isomorfe med hverandre.