Løsningsforslag Øving 11
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

9.1.18
Ved Teorem 4(ii) er svaret $mi + 1 = 5 \cdot 100 + 1 = 501$.

9.1.19
Ved Teorem 4(ii) har treet $mi + 1 = 2 \cdot 1000 + 1 = 2001$ hjørner, og ved teorem 2 har treet da $2001 - 1 = 2000$ kanter.

9.1.20
Ved Teorem 4(i) er svaret $[(m-1)n+1]/m = (2 \cdot 100 + 1)/3 = 67$.

9.1.22
Dette kan representeres som et komplett 5-ært tre, der roten representerer den som først sender brev. Et indre hjørne er en person som sender brev videre, mens et blad er en person som mottar brev uten å sende det videre. Vi blir fortalt at det er $10,000$ indre hjørner. Ved Teorem 4(ii) ser vi at totalt antall hjørner er $n = mi + 1 = 5 \cdot 10000 + 1 = 50,001$. Alle bortsett fra roten mottar brevet, så det er 50,000 personer som mottar brevet. Det er $50001 - 10000 = 40,001$ blader i treet, så det er antall personer som mottar brevet uten å sende det videre.

9.3.6
a) Det finnes et slikt tre. Det kan konstrueres ved å starte fra begynnelsen av listen og tegne de delene av treet som er nødvendig pga. de gitte bladene. Sjekk selv at treet kan lages ved å tegne det opp.
b) Hvis det finnes et slikt tre, så må adressen 2.4.1 opptre siden 2.4.2 er med. Hjørnet med den adressen må enten være et blad, eller ha en etterkommer som er et blad. Uansett må det da være en adresse som begynner med 2.4.1, og det er det ikke. Dermed finnes ikke et slikt tre.
c) Nei. 1.2.2 og 1.2.2.1 kan ikke begge være blader.

9.3.24
Vi bruker paranteser for å vise hvilken operasjon som brukes i stegene. Vi jobber oss fra venstre mot høyre.
a) $5(21-) - 314 + + * = (51-)314 + + * = 43(14+) + * = 4(35+)* = (48*) = 32$
b) $(93/)5 + 72 - * = (35+)72 - * = 8(72-)* = (85*) = 40$
c) $(32*)2 \uparrow 53 - 84/* = (62\uparrow)53 - 84/*- = [36](53-)84/*- = [36]2(84/)*$

$- = [36](22*)- = ([36]4-) = 32.$

9.4.24
Hvis kanten er en kutt-kant (dvs. dersom man fjerner kanten resulterer det i et økt antall sammenhengende komponenter for grafen) så vil denne kutt-kanten være den unike enkle veien mellom sine hjørner. Derfor må den være i ethvert utspennende tre for grafen. På den annen side, hvis en kant ikke er en kutt-kant, så kan den fjernes uten å å dele opp grafen, og ethvert utspennende tre av den resulterende grafen vil være et utspennende tre for den originale grafen uten å inneholde denne kanten. Dermed har vi vist at en kant i en enkel sammenhengende graf må være i ethvert utspennende tre for grafen hvis og bare hvis den er en kutt-kant.

10.1.26
a) xy
b) $\bar{x} + \bar{y}$
c) $(x + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$
d) $(x + \bar{z})(x + 1)(\bar{x} + 0)$

10.1.32
For å bevise at komplementet til x er unikt, antar vi at y er et komplement (dvs. $x \vee y = 1$ og $x \wedge y = 0$) og manipulerer symbolene (ved å bruke aksiomene i Definisjon 1) inntil vi har $y = \bar{x}$. Begrunnelsen for hvert steg i dette beviset er kun en (eller flere) av disse aksiomene.

$$\begin{aligned}
y = y \wedge 1 &= y \wedge (x \vee \bar{x}) \\
&= (y \wedge x) \vee (y \wedge \bar{x}) \\
&= (x \wedge y) \vee (y \wedge \bar{x}) \\
&= 0 \vee (y \wedge \bar{x}) \\
&= y \wedge \bar{x} \\
&= (y \wedge \bar{x}) \vee 0 \\
&= (y \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge \bar{x}) \\
&= (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge x) \\
&= \bar{x} \wedge (y \vee x) \\
&= \bar{x} \wedge (x \vee y) \\
&= \bar{x} \wedge 1 = \bar{x}.
\end{aligned}$$

kont99:8

Grafen har en enkel krets av lengde 3 og en av lengde 4 (og faktisk en av lengde 7, hvilken?). Ved å fjerne en kant fra hver av disse kretsene får vi et utspennende tre. Sjekk dette! Vi kan heller ikke fjerne mer en en kant fra noen av disse kretsene, for da vil det som blir igjen ikke lenger være sammenhengende. Sjekk igjen! Dermed er det $12 = 3 \cdot 4$ mulige utspennende trær. Tegn disse!

Se på graden til hjørnene for å få et hint om hvilke som er isomorfe med hverandre. Hvis vi grupperer sammen de som er isomorfe får vi fire grupper. (Kretsen av lengde tre gir bare to muligheter når vi teller trær som er isomorfe bare en gang, og kretsen av lengde 4 gir også bare to muligheter. Disse kan settes sammen på fire måter, og vi kan sjekke at ingen av disse er isomorfe.)

kont99:9

Det mangler et blad rett foran 2.3.1.2, og det må være 2.3.1.1.