Løsningsforslag Øving 12
TMA4140-MA0302 Diskret matematikk
Høsten 2005

10.2.6
Vi må inkludere alle ledd som har tre eller flere variabler i ikke-komplementert form. Dette gir oss totalt $1+5+10=16$ ledd. Svaret er

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = {} & x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5 + x_1x_2x_3\bar{x}_4x_5 + x_1x_2\bar{x}_3x_4x_5 \\ & + x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5 + \bar{x}_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 \\ & + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 + x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5 \\ & + \bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4x_5 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4x_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4x_5.\end{aligned}$$

10.3.8
Vi har fire brytere, kall dem a, b, c og d. Bryterne har to stillinger, la oss kalle dem 0 og 1. La $F(a,b,c,d)$ være en funksjon som forteller oss om lyset er på eller ikke, $F=1$ når lyset er på og $F=0$ når lyset er av. La oss si at lyset er av når alle bryterne er i stilling null. Dermed er lyset på når nøyaktig en bryter er i stilling en eller når nøyaktig en bryter er i stilling null. I resten av tilfellene er lyset av. Dermed vet vi at F kan representeres ved

$$F(a,b,c,d) = \bar{a}bcd + a\bar{b}cd + ab\bar{c}d + abc\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d.$$

Man kan nå tegne en krets som representerer uttrykket.

11.1.12
a)
$G=(V,T,S,P)$, hvor
$V=\{S,0,1\}$
$T=\{0,1\}$
$S=S$
$P=\{S\to 0, S\to S11\}$
b)
$V=\{S,0,1\}$
$T=\{0,1\}$
$S=S$
$P=\{S\to 0S11, S\to\lambda\}$
c)
$V=\{S,A,0,1\}$
$T=\{0,1\}$

$S = S$
$P = \{S \rightarrow 0S0, S \rightarrow A, S \rightarrow \lambda, A \rightarrow 1A, A \rightarrow 1\}$

11.1.14
$V = \{S, 0, 1\}$
$T = \{0, 1\}$
$S = S$
$P = \{S \rightarrow 1S1, S \rightarrow 0S0, S \rightarrow 1, S \rightarrow 0, S \rightarrow \lambda\}$
Merk at denne grammatikken er kontekstfri, siden hvert symbol på venstre side i produksjonen er et enkelt ikke-terminalt symbol.

11.2.8
Vi trenger kun to tilstander, siden hva maskinen skal gjøre kun avhenger av om den har lest inn et like eller odde antall bit. Overgang fra tilstand s_0 til tilstand s_1 blir gjort hver gang maskinen har lest et odde antall bit, da gir maskinen ut den verdien som kommer inn. Overgang tilbake til tilstand s_1 gjøres hver gang maskinen har lest et like antall bit, da gir maskinen ut den motsatte verdien av den som kommer inn.

11.3.8

a)	$A \subseteq A^2$	ikke alltid
b)	$A = A^2 \Rightarrow \lambda \in A$	ja
c)	$A\{\lambda\} = A$	ja
d)	$(A^*)^* = A^*$	ja
e)	$A^*A = A^*$	ikke alltid
f)	$\lvert A^n \rvert = \lvert A \rvert^n$	ikke alltid

Vi konstruerer moteksempler for **a)** **e)** og **f)**.
a) $A = \{1\}, A^2 = \{11\}, A \cap A^2 = \emptyset$.
e) $A = \{1\}, A^*A = \{1, 11, 111, \cdots\}, A^* = \{\lambda, 1, 11, \cdots\}$.
f) $A = \{\lambda, 1\}, A^2 = \{\lambda, 1, 11\}, |A^2| = 3 < |A|^2 = 4$.

Bevis for **b)**. Utsagnet er ikke sant om A er den tomme mengde. Om man ser bort fra den muligheten, så er utsagnet sant. For hvis $\lambda \notin A$ så vil enhver streng i A^2 være lengre enn den korteste strengen i A, så dermed er den korteste strengen i A ikke med i A^2.
Bevis for **c)**. Dette er sant siden $\alpha\lambda = \alpha$ for alle strenger.
Bevis for **d)**. Generelt gjelder $A \subseteq A^*$, spesielt er $A^* \subseteq (A^*)^*$. Siden katenasjon av strenger igjen er en streng er også $(A^*)^* \subseteq A^*$. Altså er $(A^*)^* = A^*$.

11.3.10

a) Den første innverdien holder maskinen i tilstand s_0. Den andre verdien endrer tilstanden til s_1. Den tredje verdien endrer tilstanden tilbake til s_0. Siden s_0 er en slutt-tilstand, så er strengen akseptert.

b) Innstrengen får maskinen til å gjennomløpe tilstandene s_1, s_2, s_0 og s_1. Siden s_1 ikke er en slutt-tilstand, så aksepteres ikke strengen.

c) Maskinen gjennomløper tilstandene s_1, s_2, s_0, s_1, s_2, s_0 og s_1. Siden s_1 ikke er en slutt-tilstand, så aksepteres ikke strengen.

d) Maskinen gjennomløper tilstandene s_0, s_1, s_0, s_1, s_0, s_1, s_0, s_1 og s_0. Siden s_0 ikke er en slutt-tilstand, så aksepteres ikke strengen.

11.3.12

Med mengdenotasjon kan vi beskrive språket som følger

$$L(M) = \{\lambda\} \cup \{1\alpha | \alpha \in \{0,1\}^*\} \cup \{01^n 0\alpha | n \in \mathbb{N}, \alpha \in \{0,1\}^*\}$$

Med ord. Den tomme strengen, samt alle strenger som begynner med 1 og alle strenger som begynner med 01^n0 for $n = 0, 1, 2, \cdots$.