LØSNINGSFORSLAG MIDTSEM-H06 TMA4140/MA0302

Oppgave 1 Hvilke av de sammensatte proposisjonene er tautologier?

Alt 1) $(\neg(p \wedge q)) \rightarrow (q \vee r)$-feil

Alt 2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$-riktig, den siste delen av uttrykket er den første negert, så en har et uttrykk på formen $s \vee \neg s$.

Alt 3) $\mathbf{T} \wedge ((p \vee q) \wedge q)$-feil

Alt 4) $(p \rightarrow p) \leftrightarrow p$-feil

Oppgave 2 Følgende utsagn er del av en systemspesifikasjon:

- Systemet fungerer normalt og er i flerbruker-modus.
- Hvis kernelen støtter protokollen så er systemet i flerbruker-modus.
- Det er nødvendig at kernelen støtter protokollen for at systemet skal fungere normalt.

Hvilke utsagn gjør at spesifikasjonen *ikke* er konsistent?

Alt 1) Kernelen støtter ikke protokollen-riktig. Gjør, via siste setning, at systemet ikke fungerer normalt, og da er aldri første setning sann.

Alt 2) Systemet er i flerbruker-modus eller fungerer normalt-feil.

Alt 3) Systemet er i flerbruker-modus-feil.

Alt 4) Ruteren støtter protokollen-feil, har ingen innvirkning på de ovenstående setningene.

Oppgave 3 Hvis vi setter opp følgende predikater:

- $P(x, y)$: x har sett filmen y.
- $Q(x, y)$: x har regissert filmen y.

Med univers alle mennesker, alle mennesker og alle filmer. Hvilke av de kvantifiserte utsagnene nedenfor har da samme betydning som:
'Det finnes en regissør som alle personer har sett minst en av filmene til.'
Setter en opp uttrykket så får en $\exists x \forall y \exists z (Q(x, z) \wedge P(y, z))$, og ingen av de andre betyr det samme som denne.

Alt 1) $\exists x \exists y \forall z (Q(x,z) \wedge P(y,z))$-feil

Alt 2) $\exists x \exists y \forall z (Q(x,z) \vee (\neg P(z,y)))$ -feil

Alt 3) $\exists x \forall y (\neg \exists z (Q(x,z) \vee P(y,z)))$ -feil

Alt 4) $\exists x \forall y \exists z (Q(x,z) \wedge P(y,z))$-riktig

Oppgave 4 Hvis $U = \{x, y, z, \{x, y\}, \emptyset\}$, hva er da sant?

Alt 1) $z \subseteq U$ -feil, y er ikke en mengde.

Alt 2) $\{y, z\} \subseteq U$-riktig, y og z ligger i U.

Alt 3) $\emptyset \subseteq U$-riktig, alltid sant.

Alt 4) $\{y, z\} \in U$ -feil, bare elementene ligger i U, ikke mengden selv.

Oppgave 5 Hvis du får vite at funksjonen f er $O(x^3)$, hvilke påstander *vet* du da *helt sikkert* at er sanne?

Alt 1) f er ikke $\Theta(x^4)$-riktig. For at dette skulle vært sant, så måtte f vært $\Omega(x^4)$, som er umulig når den er $O(x^3)$.

Alt 2) Hvis g er $O(\log x)$ så vil $(fg)(x)$ være $O(x^3 \log x)$-riktig, se teorem 2.2.3.

Alt 3) f er $\Theta(x^3)$-feil, dette er mulig, men ikke sikkert.

Alt 4) f er $\Omega(x^2)$-feil, mulig, men ikke sikkert.

Oppgave 6 Hvilke tall er lik $(ABCD)_{16}$?
Det er bare å regne ut summene, da får en:

Alt 1) $(47340)_{10}$-feil

Alt 2) $(1010101111001101)_2$-riktig

Alt 3) $(47340)_8$-feil

Alt 4) $(158399)_8$-bare tull, ingen 9-tall i en base 8 ekspansjon, så feil.

Oppgave 7 Hva er koeffisienten til x^{12} i ekspansjonen av $(2x-3)^{17}$?

Alt 1) $-\binom{17}{5}2^{12}3^5$=$\binom{17}{5}2^{12}(-)3^5$ =$\binom{17}{12}2^{12}(-)3^5$-riktig. Og da må de andre være feil.

Alt 2) $\binom{17}{12}$-feil

Alt 3) $\binom{17}{12}2^{12}$-feil

Alt 4) $\binom{12}{5}2^{12}(-3)^5$-feil

Oppgave 8 Vi ser på funksjoner mellom mengdene $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hvilke utsagn er sanne?
Regning etter eksempel 4.1.5/6:

Alt 1) Det er 256 forskjellige funksjoner fra A til B.-feil

Alt 2) Det er 240 forskjellige 1-1 funksjoner fra A til B-feil, det er 120

Alt 3) Det er 0 forskjellige på (onto) funksjoner fra A til B-riktig, regning trengs ikke, siden A har mindre kardinalitet enn B.

Alt 4) Det er 625 forskjellige funksjoner fra A til B-riktig.

Oppgave 9 Hvilke av de nedenstående rekursivt definerte funksjonene $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ er veldefinerte?

Alt 1) $F(0) = 1$, Rekursjon:$F(n) = F(0)$ for $n \geq 0$-riktig, rekursjonen er foregående ledd, selvom det er ett bestemt.

Alt 2) $F(0) = 1$, $F(1) = 3$, Rekursjon:$F(n) = F(n-3) + 4$ for $n \geq 3$-feil. Udefinert for $F(2)$.

Alt 3) $F(0) = 0$, $F(1) = 2$, Rekursjon:$F(n) = F(n/2) + 2$ for $n \geq 2$-feil, rekursive formel refererer til ikke-heltall for n odde.

Alt 4) $F(0) = -1$, $F(1) = -7$, Rekursjon:$F(n) = F(n-1)+4$ for $n \geq 1$-feil. Kollisjon mellom basis og rekursjon for $n = 1$.

Oppgave 10 Hvis $a|b$, hvor $a, b \in \mathbb{Z}$, hva er da garantert sant?

Alt 1) $0 \equiv b \pmod a$-riktig, b er et multiplum av a.

Alt 2) $a - b \equiv 1 \pmod m$-feil, dette kan vi ikke vite.

Alt 3) Det finnes $k \in \mathbb{Z}$ slik at $bk = a$-feil, det er motsatt, det finnes k slik at $b = ka$.

Alt 4) b **div** $a \in \mathbb{Z}$-riktig, alltid sant

Oppgave 11 Om kardinalitet. Hva er sant?

Alt 1) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^+|$-riktig.

Alt 2) $|\{\emptyset\}| = 0$-feil, denne mengden inneholder ett element, den tomme mengden.

Alt 3) $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}|$-feil, $\mathbb{R}$ er overtellbar, mens $\mathbb{Q}$ er tellbar.

Alt 4) $|\{1, 3, 4, 5, 6\}| = 5$-riktig.

Oppgave 12 Hvis 7 personer deltar i en konkurranse, hvor mange måter kan de komme på de tre første plassene på, hvis ingen kan være på samme plass samtidig?
Tvetydig formulert, det det finnes riktig svar til er at plassering ikke betyr noe. Oppgaven er tatt ut av bedømmelsen av prøven.

Alt 1) $C(7, 3)$-riktig.

Alt 2) $\binom{7}{3} \cdot 4!$-feil.

Alt 3) $\frac{10!}{7!3!}$-feil.

Alt 4) $P(7, 4)$-feil.

Oppgave 13 Vi ser på en funksjon fra $A = \{1, 2, 3\}$ til $B = \{1, 2, 4, 5\}$, gitt ved at $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ og $f(3) = 1$. Hva er da sant?

Alt 1) f er på-galt.

Alt 2) f er 1-1-rett

Alt 3) f er både 1-1 og på-galt.

Alt 4) f er hverken 1-1 eller på-galt.

Oppgave 14 Hvis du skal benytte matematisk induksjon til å vise at en følge utsagn $P(n)$ er sanne for alle heltall $n \geq 2$, hvilke utsagn om selve bevisprosessen er da korrekte?

Alt 1) Basissteget går ut på å vise at $P(1)$ er sann-feil, basissteget er $P(2)$.

Alt 2) Induksjonsantagelsen er at $P(i)$ er sann for alle $i \leq k$-feil, det snakkes om matematisk induksjon, ikke sterk induksjon.

Alt 3) Induksjonssteget skal vise at $P(k)$ impliserer $P(k+1)$ for $k \geq 2$-riktig

Alt 4) Basissteget går ut på å vise at $P(0)$ er sann-feil, basissteget er $P(2)$.

Oppgave 15 La A, B, C være undermengder av ett eller annet univers $\mathcal{U}$, og la $S = \overline{A \cup \overline{(C \cap B)}}$. Hvilke mengder *må* da være like S?
Benytt mengde-identiteter i tabell 1, i avsnitt 1.7, særlig DeMorgan.

Alt 1) $\overline{A} \cap C \cap B$-riktig.

Alt 2) $\overline{A \cup ((\overline{C \cap B}) \cup B)}$-feil.

Alt 3) $\overline{(\overline{A} \cup B)} \cap C$-feil.

Alt 4) $((\overline{\overline{A} \cup B}) \cap C) \cup \mathcal{U}$-feil. Union med hele universet kan ‘veldig lett‘ ha noe å si.