Et notat om funksjoner, og forhåpentligvis en hjelp til oppgave 2.3.41
Åsmund Eldhuset
10.09.2008

Det som er mest essensielt å få med seg (og det som vil virke mest uvant), er at vi i diskret betrakter funksjoner som *mengder*. Mengden som utgjør en funksjon fra A til B inneholder *tupler* (en ordnet samling med elementer, f.eks. $(3, 5)$, som består av *først* 3 og *så* 5, i motsetning til mengden $\{3, 5\}$, hvor rekkefølgen på elementene er uinteressant) hvor hver tuppel spesifiserer først en verdi fra A og så en verdi fra B. For å finne resultatet av $f(x)$, leter man gjennom tuplene etter en tuppel hvor x er første element. Det andre elementet er resultatet av funksjonen. Det skal finnes nøyaktig én tuppel for hvert element i A, men det er ikke nødvendig å "dekke" alle elementene fra B. Matematiske formler kan godt brukes for å få en mer kompakt spesifikasjon av en funksjon, men det er altså ikke nødvendig. Det holder å spesifisere mengden, og så har man en funksjon. Funksjonen $f(x) = x^2$ fra mengden $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ til $\mathbb{Z}$ (altså mengden med heltall) ser altså slik ut: $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ - f.eks. forteller tuppelen $(4, 16)$ at $f(4) = 16$. En like gyldig funksjon mellom de samme mengdene, men som kanskje ikke er like enkel å beskrive med en matematisk formel, er f.eks. $\{(0, 1000), (1, 0), (2, 39), (3, 42), (4, 42)\}$. Hvis man endrer, legger til eller fjerner en tuppel, får man en ny funksjon - mengden *er* altså selve funksjonen.

En inversfunksjon er en funksjon som går motsatt vei av den originale funksjonen (du får den ved å snu alle tuplene i den originale funksjonen). Å si at $x = f^{-1}(y)$ er det samme som å si at $y = f(x)$, og dette er igjen det samme som å si at tuppelen (x, y) er med i mengden som utgjør funksjonen f.

Når man skriver $f(S)$, hvor S er en mengde, mener man å prate om mengden av elementer man får når man bruker f på elementene fra S. For eksempel, hvis $f(x) = x^2$, vil $f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$, og $f^{-1}(\{1, 4, 9\}) = \{1, 2, 3\}$.

Én måte å bevise at to mengder er like på, er å bevise at et noe er et element i den ene mengden hvis og bare hvis det er et element i den andre mengden. Man kan altså bevise at $A = B$ ved å bevise at $x \in A \equiv x \in B$. La oss prøve dette på oppgave 40a. Vi vil altså vise at $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$. Vi kan ta i bruk en eksempelfunksjon for lettere å illustrere hva som skjer, men det er viktig å ikke la bevisene sine avhenge av det spesifikke eksempelet man har valgt. La $f(x) = x^2$ være en funksjon fra mengden $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ til $B = \{0, 1, 4, 9, 16\}$. La $S = \{0, 1, 4\}$ og $T = \{4, 9\}$. Da er $S \cup T = \{0, 1, 4, 9\}$. $f^{-1}(S \cup T)$ består av alle elementene fra A som gir elementer i $S \cup T$, altså $\{0, 1, 2, 3\}$. $f^{-1}(S) = \{0, 1, 2\}$, og $f^{-1}(T) = \{2, 3\}$, så vi ser at $f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ også blir lik $\{0, 1, 2, 3\}$. Dette ser lovende ut, men et bevis må altså føres på generelt grunnlag, uten antagelser om hva mengdene inneholder og hvordan funksjonen ser ut. La oss forsøke.

Vi kan som nevnt forsøke å bevise at $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ ved å bevise at $x \in f^{-1}(S \cup T) \equiv x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$. Det at $x \in f^{-1}(S \cup T)$ er bare en annen skrivemåte for at $f(x) \in S \cup T$ (x er altså et hvilket som helst element som oppfyller betingelsen at hvis du bruker f på den, får du et element i $S \cup T$). Men det at et element ligger i en union av to mengder, er jo det samme som at elementet enten ligger i den ene eller den andre mengden, altså tilsvarer dette at $f(x) \in S \vee f(x) \in T$. Dette kan uttrykkes som at $x \in f^{-1}(S) \vee x \in f^{-1}(T)$, og siden x ligger enten i $f^{-1}(S)$ eller i $f^{-1}(T)$, ligger den i unionen av mengdene: $x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$, og vi er ferdige.

Kompakt utgave: $x \in f^{-1}(S \cup T) \equiv f(x) \in S \cup T \equiv f(x) \in S \vee f(x) \in T \equiv x \in f^{-1}(S) \vee x \in f^{-1}(T) \equiv x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

Avslutt gjerne med en fin **Q.E.D.** – *quod erat demonstrandum*, altså "det som skulle bevises".