Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Haaken A. Moe
92650655

Bokmål

EKSAMEN I TMA4140 og MA0302
Diskret Matematikk

12. desember 2006
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler:
Enkel kalkulator HP30S,
Rottmanns matematiske formelsamling.

Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1 a) Skriv ned definisjonen på en *tautologi*.

b) La p og q være proposisjoner(propositions). Vis at

$$\left(p \vee \neg p\right) \to \left(\neg q \wedge p\right)$$

er en tautologi.

Oppgave 2 Fibonaccitallene er rekursivt definert ved

Basissteg: $F_0 = 0$ og $F_1 = 1$,
Rekursivt steg: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for heltall $n \geq 2$.

Benytt matematisk induksjon til å vise at for alle heltall $n \geq 0$ så er

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Oppgave 3 a) Benytt Euklids algoritme til å finne en invers til 293 modulo 2980.

b) Finn ett heltall x som løser

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv 2 \pmod{78}. \end{aligned}$$

Oppgave 4 Se på mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, og kall denne mengden **F**. En relasjon $\mathcal{R}$ på **F** er definert ved at

$$(f, g) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow f(1) = g(1).$$

Så ett par av funksjoner f og g hvor begge går fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$ er med i $\mathcal{R}$ hvis og bare hvis f og g tar samme verdi på 1. Vis at $\mathcal{R}$ er en ekvivalensrelasjon (equivalence relation).

Oppgave 5 Løs rekurrensrelasjonen (recurrence relation)

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2},$$

for $n \geq 2$, med initalbetingelsene $a_0 = 3$ og $a_1 = 6$.

Oppgave 6 a) La G være en simpel/enkel urettet graf som inneholder en Euler-sti. Noen har forsøkt å skrive ned naboskapsmatrisen(adjacency matrix)til G:

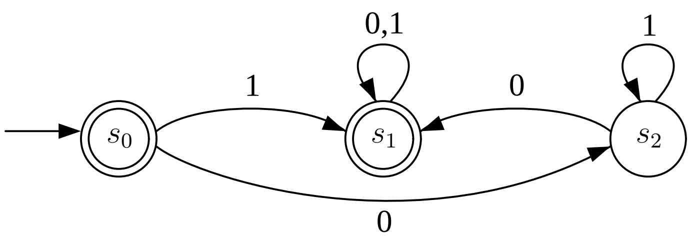
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Men de har gjort tre feil. Dette gjør at det finnes flere måter å endre denne matrisen på slik at den er naboskapsmatrisen til en graf som oppfyller egenskapene som G skal ha. Finn de mulige naboskapsmatrisene for G, og tegn grafen til to av disse matrisene.

b) Skriv ned defininsjonen på at to grafer er *isomorfe*(isomorphic), og avgjør om de to grafene du tegnet i a) er isomorfe. Hvis de er det, skriv opp en graf-isomorfi, hvis ikke, forklar hvorfor de ikke kan være isomorfe.

Oppgave 7 a) Hvis $V = \{0, 1\}$, hva er da Kleene tillukningen(Kleene closure), V^*, av V? Skriv ned 5 forskjellige strenger/ord fra V^*.

b) Hva betyr det at en ikke-deterministisk endelig tilstandsautomat gjenkjenner/aksepterer(recognizes) et språk? Finn språket som gjenkjennes av den ikke-deterministiske endelig tilstandsautomaten



.