Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG(Sensor) I TMA4140 og MA0302

12. desember 2006

Oppgave 1 a) Skriv ned definisjonen på en *tautologi*.

Svar: En tautologi er en sammensatt proposisjon som er sann uansett sannhetsverdien til proposisjonene den består av.

b) La p og q være proposisjoner(propositions). Vis at

$$\big(p \wedge \neg p\big) \to \big(\neg q \wedge p\big)$$

er en tautologi.

Svar:

p	q	$\big(p \wedge \neg p\big) \to \big(\neg q \wedge p\big)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Fra tabellen ser vi at det siste uttrykket er en tautologi siden det er sant uansett sannhetsverdien til p og q.

Oppgave 2 Fibonaccitallene er rekursivt definert ved

Basissteg: $F_0 = 0$ og $F_1 = 1$,

Rekursivt steg: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for heltall $n \geq 2$.

Benytt matematisk induksjon til å vise at for alle heltall $n \geq 0$ så er

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Svar: *Basissteg:*

$$\sum_{i=0}^{0} F_i^2 = F_i^2 = 0 = 0 \cdot 1 = F_0 \cdot F_1,$$

så basissteg ok.
Induksjonssteg: Induksjonsantagelse er at

$$\sum_{i=0}^{k} F_i^2 = F_k \cdot F_{k+1},$$

for $k \geq 0$. Vil vise at dette medfører at

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}.$$

Vi regner:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} F_i^2 &= \sum_{i=0}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+2},\end{aligned}$$

så induksjonssteget holder også, og etter prinsippet for matematisk induksjon så holder utsagnet for alle ikke-negative heltall n.

Oppgave 3 a) Benytt Euklids algoritme til å finne en invers til 293 modulo 2980.

Svar: Utregning med Euklids algoritme:

$$\begin{aligned}2980 &= 10 \cdot 293 + 50 \\ 293 &= 5 \cdot 50 + 43 \\ 50 &= 1 \cdot 43 + 7 \\ 43 &= 6 \cdot 7 + 1\end{aligned}$$

Setter vi dette sammen så får vi:

$$\begin{aligned}1 &= 43 - 6 \cdot 7 \\ &= 43 - 6 \cdot (50 - 43) \\ &= 7 \cdot 43 - 6 \cdot 50 \\ &= 7 \cdot (293 - 5 \cdot 50) - 6 \cdot 50 \\ &= 7 \cdot 293 - 11 \cdot 50 \\ &= 7 \cdot 293 - 41 \cdot (2980 - 10 \cdot 293) \\ &= 417 \cdot 293 - 41 \cdot 2980\end{aligned}$$

Så 417 er en mulig invers, det samme er alle andre heltall $417 + k \cdot 2980$, hvor k er ett eller annet heltall.

b) Finn ett heltall x som løser

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv 2 \pmod{78}. \end{aligned}$$

Svar: Vi starter med å finne en invers, y_1, til 78 modulo 7. Vi har at $78 = 7 \cdot 11 + 1$. Dette betyr at

$$78 - 7 \cdot 11 = 1$$

så 1 er en invers til 78 modulo 7, og -11 er en invers til 7 modulo 78. Deretter setter vi $x_1 = 3 \cdot 78 \cdot 1$. Dette gir et tall som "passer i den første ligningen og som er null i den andre." Tisvarende vil $x_2 = 2 \cdot 7 \cdot (-11)$ være "en løsning for den andre ligningen og null i den første." Dermed er $x = x_1 + x_2 = 234 - 154 = 80$ en løsning. Fra den kinesiske restsetningen får vi at $x = 80 + 546k$, k heltall, er alle løsningene (78 ganger 7 er 546), så alle tall som kan skrives slik er en løsning.

Oppgave 4 Se på mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, og kall denne mengden **F**. En relasjon $\mathcal{R}$ på **F** er definert ved at

$$(f, g) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow f(1) = g(1).$$

Så ett par av funksjoner f og g hvor begge går fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$ er med i $\mathcal{R}$ hvis og bare hvis f og g tar samme verdi på 1. Vis at $\mathcal{R}$ er en ekvivalensrelasjon (equivalence relation).

Svar: Vi må vise at **F** er refleksiv, symmetrisk og transitiv:

Refleksiv: Hvis f er en funksjon fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$, så må $f(1) = f(1)$, så $(f, f) \in \mathcal{R}$, og **F** er refleksiv.

Symmetrisk: Hvis $(f, g) \in \mathcal{R}$ så $f(1) = g(1)$ og da er $g(1) = f(1)$ så $(g, f) \in \mathcal{R}$, og **F** er symmetrisk.

Transitiv: Hvis $(f, g), (g, h) \in \mathcal{R}$, så er $f(1) = g(1)$ og $g(1) = h(1)$. Dette medfører at $f(1) = g(1) = h(1)$, som gir at $(f, h) \in \mathcal{R}$, og **F** er transitiv.

Så dette betyr at **F** er en ekvivalensrelasjon.

Oppgave 5 Løs rekurrensrelasjonen (recurrence relation)

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2},$$

for $n \geq 2$, med initalbetingelsene $a_0 = 3$ og $a_1 = 6$.

Svar: Vi begynner med å finne den karakteristiske ligningen:

$$\begin{aligned} r^n &= r^{n-1} + 6r^{n-2}, \\ &\text{som gir karakteristisk ligning} \\ r^2 &= r^1 + 6 \\ &\text{det vil si} \\ r^2 - r - 6 &= 0 \end{aligned}$$

som har røttene -2 og 3. Dette betyr at løsningen vil være på formen

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n.$$

For å finne α_1 og α_2 så løser vi følgende ligninger som vi får ved å sette inn initialbetingelsene:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 = \alpha_1(-2)^0 + \alpha_2 3^0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 &= 6 = \alpha_1(-2)^1 + \alpha_2 3^1 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{aligned}$$

Som gir at $\alpha_1 = 3/5$ og $\alpha_2 = 12/5$, og vi får følgende løsning:

$$a_n = (3/5) \cdot (-2)^n + (12/5) \cdot 3^n.$$

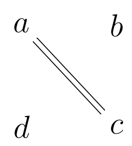
Oppgave 6 a) La G være en simpel/enkel urettet graf som inneholder en Euler-sti. Noen har forsøkt å skrive ned naboskapsmatrisen(adjacency matrix)til G:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

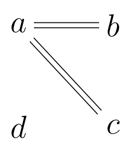
Men de har gjort tre feil. Dette gjør at det finnes flere måter å endre denne matrisen på slik at den er naboskapsmatrisen til en graf som oppfyller egenskapene som G skal ha. Finn de mulige naboskapsmatrisene for G, og tegn grafen til to av disse matrisene.

Svar: Siden dette er en urettet graf så må naboskapsmatrisen være symmetrisk. Det er 8 mulige måter å forandre den gitte matrisen på tre steder på,slik at den gir en symmetrisk matrise, 7 av disse representerer en graf med en Euler-sti. Hvis vi navner hjørnene i den korresponderende grafen $\{a, b, c, d\}$, så får vi (dobbeltstrek betyr kant, lettere å typesette slik):

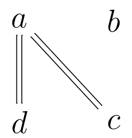
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow$$



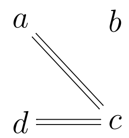
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow$$



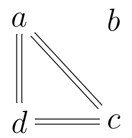
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow$$



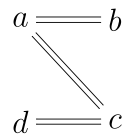
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow$$



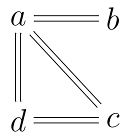
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow$$



b) Skriv ned defininsjonen på at to grafer er *isomorfe*(isomorphic), og avgjør om de to grafene du tegnet i a) er isomorfe. Hvis de er det, skriv opp en graf-isomorfi, hvis ikke, forklar hvorfor de ikke kan være isomorfe.

Svar: To grafer $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ er isomorfe når det finnes en funksjon $f : G_1 \to G_2$ slik at det finnes en kant i E_1 mellom $x, y \in G_1$ hvis og bare hvis det finnes en kant i E_2 mellom $f(x), f(y) \in G_2$.

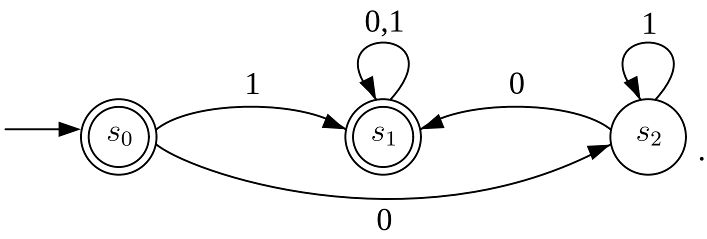
De tre grafene over med like mange kanter er isomorfe, en og en isomorfi vil da være en omnavning av hjørnene i grafen slik at de er koblet likt. For ikke isomorfi så holder argumenter om antall kanter, bortsett fra for de to med 3 kanter. Men bare den ene inneholder en krets, så disse er heller ikke isomorfe.

Oppgave 7 a) Hvis $V = \{0, 1\}$, hva er da Kleene tillukningen(Kleene closure), V^*, av V? Skriv ned 5 forskjellige strenger/ord fra V^*.

Svar: Kleene tillukningen av V er alle endelige strenger bestående av 0'er og 1'ere, inklusive den tomme strengen. Formelt:

$$V^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} V^i$$

b) Hva betyr det at en ikke-deterministisk endelig tilstandsautomat gjenkjenner/aksepterer(recognizes) et språk? Finn språket som gjenkjennes av den ikke-deterministiske endelig tilstandsautomaten



Svar: Maskinen er deterministisk også. Den aksepterer den tomme strengen, siden s_0 er en endelig tilstand. Videre så ser vi at hvis maskinen havner i den endelige tilstanden s_1 så blir den der, uansett hvilken streng den får som input. For å komme til s_1 så kan en få enten en ener, eller to nuller med tilfeldig antall enere i mellom. Maskinen gjenkjenner med andre ord følgende språk:

$$\{\lambda, \{1, 01^*0\}\{0,1\}^*\}.$$