Institutt for matematiske fag

FASIT/LF FOR EKSAMEN TMA4140, H07

Oppgave 1 (10%) Benytt matematisk induksjon til å vise at

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

for alle heltall $n \geq 1$.

Løsning: Basissteg: $n = 1$, som gir

$$\sum_{i=1}^{1} i \cdot i! = 1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1 = 2 - 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1,$$

og basissteget holder. Induksjonssteget: Antar at

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$$

stemmer for tilfeldig k. Skal vise at dette impliserer

$$\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot i! = ((k+1)+1)! - 1.$$

Regner ut, og starter på venstre side:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot i! &= \sum_{i=1}^{k} i \cdot i! \\
&= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! \\
&= (k+1+1) \cdot (k+1)! - 1 \\
&= (k+2) \cdot (k+1)! - 1 \\
&= (k+2)! - 1
\end{aligned}$$

og vi har vist at induksjonsantagelsen medfører at ligningen holder for neste ledd. Så ligningen holder for alle $n \geq 1$ etter matematisk induksjon.

Oppgave 2 Ekvivalensrelasjoner og partisjoner.

a) (5%) Skriv ned definisjonen på at en relasjon er transitiv og definisjonen på en ekvivalensrelasjon (equivalence relation).

Løsning: En relasjon $\mathcal{R}$ er transitiv dersom for alle $(a, b), (b, c) \in \mathcal{R}$ så er $(a, c) \in \mathcal{R}$. En ekvivalensrelasjon er en relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

b) (5%) Mengden $S = \{a, b, d, e, f, g, h\}$ er gitt en partisjon (partition) $U = \{U_1, U_2, U_3\}$, hvor $U_1 = \{a, f\}, U_2 = \{b, d, e\}$ og $U_3 = \{g, h\}$. Denne partisjonen av S gir en bestemt ekvivalensrelasjon $\mathcal{R}_U$ på S. Skriv opp denne ekvivalensrelasjonen som en mengde av ordnede par.

Løsning: Relasjonen er gitt av den følgende mengden av ordnede par:

$$\{(a, a), (b, b), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g), (h, h), (a, f), (f, a), (b, d), (b, e), (d, b), (d, e),$$
$$(e, b), (e, d), (g, h), (h, g)\}$$

Oppgave 3 (10%) Finn alle heltall x som løser

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 6 \pmod{11} \end{aligned}$$

Løsning: 5, 3 og 11 er primtall, så de er garantert relativt primiske. Vi kan mao benytte det kinesiske restteoremet, som vil gi unik løsning modulo $5 \cdot 3 \cdot 11$. Finner y_1, y_2, y_3, inverser til hhv $M_1 = 33, M_2 = 55 og M_3 = 15$ modulo hhv 5, 3 og 11:

$$\begin{aligned} 33 &= 5 \cdot 6 + 3 & 55 &= 3 \cdot 18 + 1 & 15 &= 11 + 4 \\ 5 &= 3 + 2 & & & 11 &= 4 \cdot 2 + 3 \\ 3 &= 2 + 1 & & & 4 &= 3 + 1 \end{aligned}$$

Regner vi baklengs gir dette $y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 3$, som gir at

$$x = 2 \cdot 33 \cdot 3 + 1 \cdot 55 \cdot 2 + 3 \cdot 15 \cdot 6 = 578.$$

Fra det kinesiske restteoremet så vet vi at alle løsninger x av systemet vil oppfylle $x \equiv 578 \pmod{5 \cdot 3 \cdot 11}$. En måte å skrive disse løsningene på vil være

$$x = 83 + 165k, k \in \mathbb{Z}.$$

Oppgave 4 (10%) Et *palindrom* er en streng som er lik om den leses forlengs eller baklengs, f.eks 'anna'. Bruk pseudokode til å beskrive en algoritme/metode som skal sjekke om strenger er palindromer. Gå ut fra at algoritmen bare skal undersøke strenger av en bestemt lengde n.

Kan du ikke pseudokode så anvend presis og *kortfattet* vanlig norsk/engelsk til å beskrive framgangsmåten for redusert uttelling på oppgaven.

Løsning: Noe lignende av dette er bra (forståelig kode til et eller annet ordinært programeringsspråk er også ok):

prosedyre palindrom (string; streng av lengde n av tegn)
palindrom=true
for $i = 1$ **to** *floor*$(n/2)$ **do**
    if string(i) $\neq$ string(n+1-i) **then** palindrom = false
returner palindrom

Det er viktig at de to kontrollerte elementene matcher, dvs at samsvarende elementer kontrolleres, og at sløyfa som blir satt opp (her en for sløyfe) springer gjennom strengen på riktig måte.

Oppgave 5 (10%) Bruk ordnede par til å beskrive *alle* mulige relasjoner på $S = \{0, 1\}$.

Løsning: Vi får disse relasjonene (16 stykk, skrevet som mengder av ordnede par):
$\emptyset$, $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$, $\{(1,0)\}$, $\{(1,1)\}$, $\{(0,0),(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,0)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$, $\{(0,1),(1,0)\}$, $\{(0,1),(1,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$, $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, $\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$, $\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$, $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

Oppgave 6 (10%) Uttrykk i prefix og postfix notasjon. Tegnet $\uparrow$ betyr opphøyd i, dvs $4^5 = 4 \uparrow 5$, * means multiplikasjon.

a) Regn ut disse uttrykkene som er skrevet i prefix notasjon, og **Løsning:**

i) $\uparrow - * 3\ 3 * 4\ 2\ 5$	**ii)** $+ - \uparrow 3\ 2 \uparrow 2\ 3\ /\ 6 - 4\ 2$
$\uparrow -9\ 8\ 5$	$+ -9\ 8\ /\ 6\ 2$
$\uparrow 1\ 5$	$+ 1\ 3$
1	4

b) Regn ut disse uttrykkene som er skrevet i postfix notasjon:

i) $5\ 2\ 1 - -3\ 1\ 4 + + *$	**ii)** $9\ 3\ /\ 5 + 7\ 2 - \ *$
$5\ 1 - 3\ 5 + \ *$	$3\ 5 + 5 *$
$4\ 8 *$	$8\ 5 *$
32	40

Oppgave 7 (10%) Vis at følgende likhet holder:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

Løsning:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{r!}{k!(r-k!)} = \frac{n!}{(n-r)!k!(r-k)!}$$
$$= \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(n-r)!(r-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!((n-k)-(r-k))!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

Oppgave 8 (10%) Karakteristiske funksjoner. La S være en mengde fra et univers $\mathcal{U}$. Den *karakteristiske funksjonen* $f_S : \mathcal{U} \to \{0,1\}$ til S er den funksjonen fra $\mathcal{U}$ til $\{0,1\}$ slik at $f_S(u) = 0$ om $u \notin S$ og $f_S(u) = 1$ om $u \in S$. La A og B være to mengder fra $\mathcal{U}$. Vis at for alle $x \in \mathcal{U}$ så er

i) $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x)$ **ii)** $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)\cdot f_B(x)$

iii) $f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x)$

Løsning: Det vi trenger å vise er at de tre likhetene holder til enhver tid. Alle de involverte funksjonene er bare avhengig av hvorvidt et element $x \in \mathcal{U}$ ligger i A og/eller B. Så vi undersøker alle mulige kombinasjoner av medlemsskap for x:

		f_A	f_B	$f_{A\cap B}$	$f_A \cdot f_B$	$f_{A\cup B}$	$f_A + f_B - f_A \cdot f_B$	$f_{\overline{A}}$	$1 - f_A$
$x \in A$	$x \in B$	1	1	1	1	1	1	0	0
$x \in A$	$x \notin B$	1	0	0	0	1	1	0	0
$x \notin A$	$x \in B$	0	1	0	0	1	1	1	1
$x \notin A$	$x \notin B$	0	0	0	0	0	0	1	1

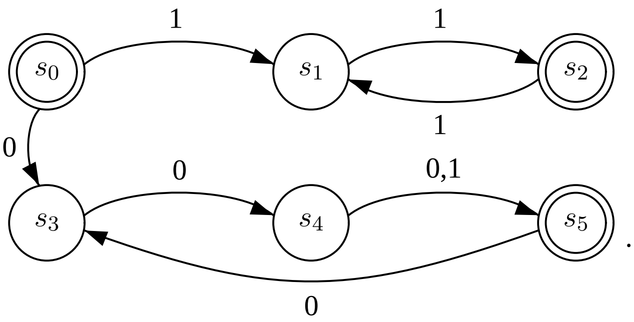
Vi ser fra tabellen at likhetene holder for alle mulige kombinasjoner av medlemsskap for x, så de beskrevne likhetene holder.

Oppgave 9 (10%) Endelig tilstandsautomat. Lag en deterministisk eller ikke-deterministisk endelig tilstandsautomat som aksepterer (recognizes) følgende språk.

$$\{11\}^* \cup \{000, 001\}^*$$

Beskriv automaten med enten et tilstandsdiagram (tegning) eller en tilstandstabell.

Løsning: En mulig ikke-deterministisk maskin som løser dette er gitt av tilstandsdiagrammet(s_o er start-node):



Oppgave 10 (10%) Boolsk algebra. **NOR**-operatoren, $\downarrow$, er definert ved at $1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0$ og $0 \downarrow 0 = 1$. Vis at denne er funksjonelt komplett (functionally complete), dvs at $\downarrow$ kan brukes til å representere alle boolske funksjoner. Hint: Vi vet fra før at $\{+, \cdot, \overline{}\}$ er funksjonelt komplett.

Løsning: Hintet sier at $\{+, \cdot, \overline{}\}$ er funksjonelt komplett. Dette betyr at om vi kan bruke $\downarrow$ til å uttrykke $+, \cdot$, og $\overline{}$ så er $\downarrow$ også funksjonelt komplett. Vi kan erstatte disse tre operatorene på følgende vis:

$a + b$ erstatt med $(a \downarrow b) \downarrow 0$ $\quad$ $a \cdot b$ erstatt med $(a \downarrow 0) \downarrow (b \downarrow 0)$ $\quad$ $\overline{a}$ erstatt med $a \downarrow 0$

Siden dette er boolsk algebra og to binære og en unær operator, så er det som må undersøkes oppførselen til de konstruerte operatorene på alle mulige kombinasjoner av lengde to (binære) og lengde en (unær) av 0 og 1. Vi gjør dette i en tabell:

a	b	$a+b$	$a \downarrow b$	$(a \downarrow b) \downarrow 0$	$\overline{a}$	$a \downarrow 0$	$b \downarrow 0$	$(a \downarrow 0) \downarrow (b \downarrow 0)$	$a \cdot b$
1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0

Som en ser av tabellen så kan $\downarrow$ brukes til å definere operatorer som kan erstatte $+, \cdot$, og $\overline{}$ så $\downarrow$ er funksjonelt komplett siden de operatorene den kunne erstatte er det.