Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Christian Skau, telefon 73591755

Eksamen i TMA4140 DISKRET MATEMATIKK

18. desember 2009
Tid: 09.00-13.00
Bokmål
Sensur 16. januar 2010

Hjelpemidler: Bestemt enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling

Eksamenssettet består av to deler: Oppgavene 1 til 5 med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye) utgjør en del, og oppgave 6, som er en flervalgsoppgave utgjør den andre delen. Oppgave 6 teller 50%, og oppgavene 1 til 5 teller 50%.
Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong der dine svar skal krysses av. Denne siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de fem første oppgavene.

Oppgave 1 Bevis ved induksjon at

$$n^2 - 7n + 12 \geq 0 \text{ når } n \geq 3.$$

Oppgave 2

a) Finn den entydige løsningen til ligningen

$$19x \equiv -7(\text{mod } 141)$$

slik at $141 < x < 282$.

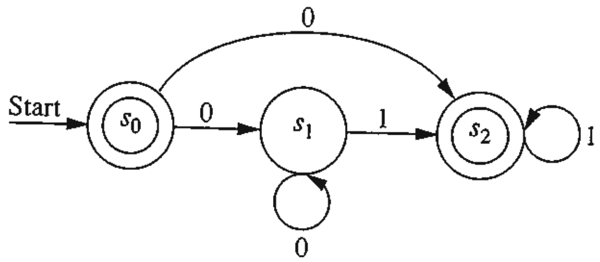
b) Finn $0 < x < 29$ slik at $7^{115} \equiv x(\text{mod } 29)$

Oppgave 3

a) Definér hva en regulær grammatikk og et regulært språk er, og formulér den sammenhengen som eksisterer mellom regulære språk og endelige tilstandsautomater.

b) Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat, bestående av høyst tre tilstander, som gjenkjenner alle binære strenger som <u>ikke</u> inneholder to påfølgende $0'$er.

c) Beskriv ved et regulært uttrykk det regulære språket som den ikke-deterministiske endelige tilstandsautomaten i Figur 1 gjenkjenner.



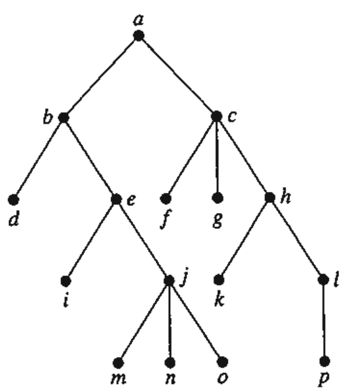
Figur 1.

d) La $G = (V,\ T,\ S,\ P)$ være grammatikken bestående av $V = \{0, 1, A, B, S\}$, $T = \{0, 1\}$ og produksjonene P gitt ved:

$$S \to 0A,\ S \to 1A,\ A \to 0B,\ B \to 1A,\ B \to 1.$$

Beskriv ved et regulært uttrykk språket $L(G)$ som G genererer.

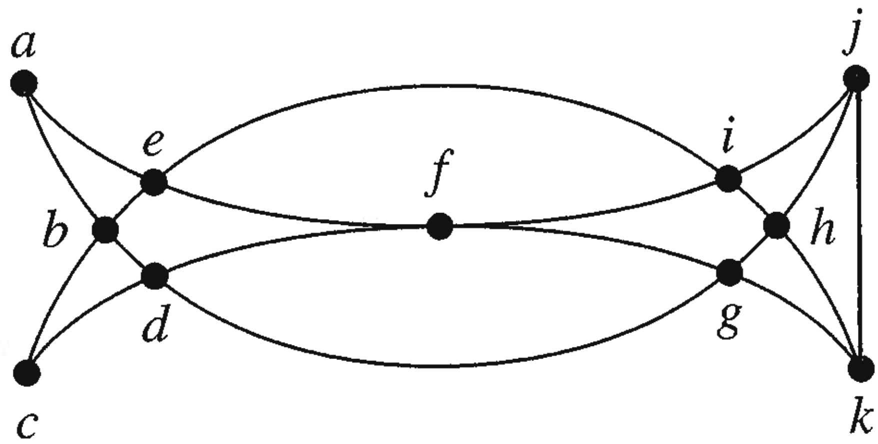
Oppgave 4 La T være det rotfestede treet i Figur 2. List nodene i henholdsvis pre-ordnings og post-ordnings systemet.



Figur 2.

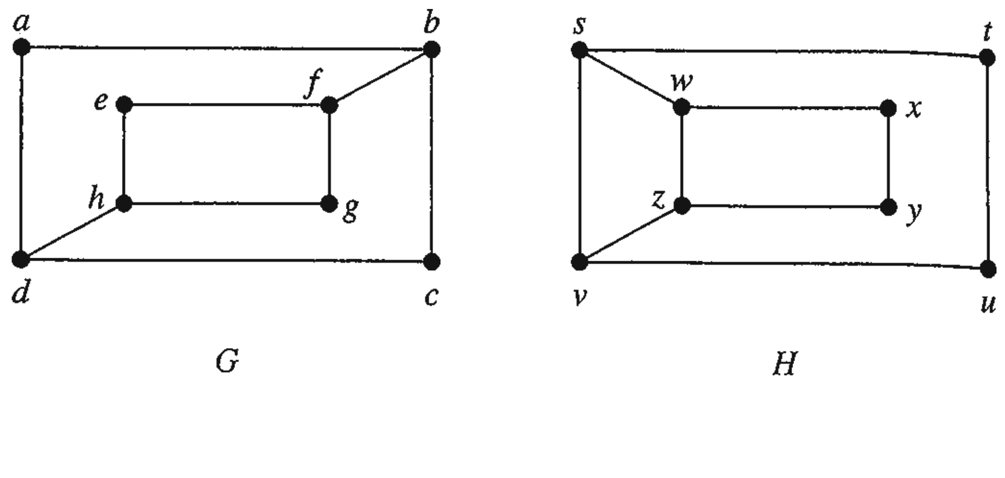
Oppgave 5

a) Avgjør om den sammenhengende enkle grafen i Figur 3 har en Euler krets eller en Euler sti. Begrunn svaret. Gjør rede for hvilke forskjellige muligheter som oppstår (med hensyn til Euler krets eller Euler sti) dersom man fjerner en kant i grafen.



Figur 3.

b) Gi en begrunnelse for om grafene G og H i Figur 4 er isomorfe eller ikke.



Figur 4.

Oppgave 6

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siden skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første fem oppgavene. Det vil være minst ett, men gjerne flere rette svar-alternativer for hver oppgave. Det er totalt 10 rette svar og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Rett kryss gir 1 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng pr. kryss mer enn 10.

Deloppgave 1. Hva er den hexadesimale (dvs. grunntall 16) fremstillingen av $(213987)_{10}$? [Vi bruker symbolene A, B, C, D, E, F til å betegne henholdsvis $10, 11, 12, 13, 14, 15$]

Alt 1) $(ABC71)_{16}$

Alt 2) $(343E3)_{16}$

Alt 3) $(A43E3)_{16}$

Alt 4) $(D2953)_{16}$

Deloppgave 2. Hva er $7\,2\,3 * -4 \uparrow 9\,3 / +$ der formelen er skrevet i postfix notasjon?

Alt 1) 6

Alt 2) 13

Alt 3) 4

Alt 4) 3

Deloppgave 3. Betrakt funksjoner $f : A \to B$, der $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{a, b, c, d, e\}$. Hvilke av følgende utsagn er sanne?

Alt 1) Det er 625 forskjellige funksjoner f.

Alt 2) Det er 1250 forskjellige funksjoner f.

Alt 3) Det er 5 forskjellige surjektive ("på") funksjoner f.

Alt 4) Det er 120 forskjellige injektive (en-entydige) funksjoner f.

Deloppgave 4. La $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ og la $m \geq 2$. Hvilke av følgende alternativer er garantert sanne?

Alt 1) $a \equiv b (\bmod m)$ og $c \equiv d (\bmod m)$ medfører at $a - d \equiv b - c (\bmod m)$

Alt 2) $a \equiv b (\bmod m)$ og $c \equiv d (\bmod m)$ medfører at $a^5 + c^5 \equiv b^5 + d^5 (\bmod m)$

Alt 3) $a^m \equiv a (\bmod m)$

Alt 4) Dersom m er et primtall så er $a^{m-1} \equiv 1 (\bmod m)$

Deloppgave 5. Hvilke av følgende alternativer er logisk ekvivalent med $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$?

Alt 1) $\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$

Alt 2) $(p \rightarrow p) \leftrightarrow \neg r$

Alt 3) $\neg((\neg q \vee r) \wedge p)$

Alt 4) $(r \vee \neg r) \wedge ((p \vee q) \wedge q)$

Deloppgave 6. Dersom universalmengden er $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$, hvilke av følgende utsagn er sanne? ($a|b$ betyr at a er en divisor i b.)

Alt1) $\forall n \exists m ((m + 1)|n)$

Alt2) $\exists n \forall m (n < m^2)$

Alt3) $\forall n \forall m \exists k (k = \frac{m+n}{2})$

Alt4) $\forall n \forall m \exists k (k|n \text{ og } k|m)$

Deloppgave 7. Gitt rekurrensrelasjonen $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}; n \geq 2$, med initialbetingelsene $a_0 = 1, a_1 = 6$. Hva er a_8?

Alt 1) 6561

Alt 2) 19683

Alt 3) 177147

Alt 4) 59049

Deloppgave 8. Hva er koeffisienten til y^5 i ekspansjonen av $(2 - 3y)^7$?

Alt 1) 6804

Alt 2) -6804

Alt 3) -20412

Alt 4) 20412

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir −3 poeng. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				