Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

KONTINUASJONSEKSAMEN I TMA4140

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1 Sannhetsverditabell for det logiske utsagnet $\big(\neg(p \wedge q)\big) \to \big(q \vee r\big)$:

p	q	r	$\neg(p \wedge q)$	$\big(q \vee r\big)$	$\neg\big(p \wedge q)\big) \to \big(q \vee r\big)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Oppgave 2 Vis ved induksjon at 21 går opp i $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ for alle heltall $n \geq 1$:

Basissteg: Vi ser på $n = 1$. Da får vi $4^{1+1} + 5^{2-1} = 16 + 5 = 21$, som jo absolutt går opp i 21. Basissteget er dermed komplett.

Induksjon: Induksjonsantagelsen er at for $k \geq 1$ så er $4^{k+1} + 5^{2k-1}$ delelig med 21. Vi vil så vise at dette medfører at $21 \mid 4^{(k+1)+1} + 5^{2(k+1)-1}$. Vi regner:

$$\begin{aligned}
4^{(k+1)+1} + 5^{2(k+1)-1} &= 4 \cdot 4^{k+1} + 5^2 \cdot 5^{2k-1} \\
&= 4 \cdot 4^{k+1} + 25 \cdot 5^{2k-1} \\
&= 4 \cdot 4^{k+1} + (21 + 4) \cdot 5^{2k-1} \\
&= 4 \cdot (4^{k+1} + 5^{2k-1}) + 21 \cdot 5^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Det vi har fått nå er delelig med 21, siden det er en sum av to ledd som er delelige med 21. Det første leddet er delelig med 21 pr induksjonsantagelse, mens det andre leddet har

21 som faktor. Så etter teoremet om matematisk induksjon så er uttrykket øverst delelig med 21 for alle heltall $n \geq 1$.

Oppgave 3 a) Vi skal finne heltall x med $0 \leq x < 2520$ slik at $x \equiv 10 \pmod{45}$ og $x \equiv 20 \pmod{56}$. Disse tallene er relativt primiske, $45 = 5 \cdot 3 \cdot 3$ og $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, så etter det kinesiske restteoremet så kan dette systemet av lineære kongruenser løses.Det vi nå trenger er inversen til 45 mod 56, y_1 og inversen til 56 mod 45, y_2.

$$\begin{aligned} 56 \cdot y_1 \equiv& 1 \pmod{45} \\ 45 \cdot y_2 \equiv& 1 \pmod{56}. \end{aligned}$$

Vi benytter Euklids algoritme, og får

$$\begin{aligned} 56 = 1 \cdot 45 + 11 \Rightarrow 11 = 56 - 1 \cdot 45 \\ 45 = 4 \cdot 11 + 1 \Rightarrow 1 = 45 - 4 \cdot 11 \end{aligned}$$

Regner vi litt så finner vi at

$$\begin{aligned} 1 =& 45 - 4 \cdot 11 \\ =& 45 \cdot -4(56 - 45) \\ =& 5 \cdot 45 - 4 \cdot 56 \end{aligned}$$

så $y_1 = -4$ og $y_2 = 5$. Setter vi dette sammen så får vi at $x = (10 \cdot -4 \cdot 56) + (20 \cdot 5 \cdot 45) = 2260$.

b) La m og n være relativt primiske heltall og la $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ og $\mathbb{Z}_{mn} = \{0, 1, 2, \ldots, (n \cdot m) - 1\}$. Definer

$$\phi : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$$

ved at $\phi(x) = \big(x \textbf{ mod } n, x \textbf{ mod } m\big)$, der x **mod** n er resten av x delt på n og x **mod** m er resten av x delt på m . Vi vil vise at ϕ er en injektiv (one-to-one) og surjektiv (onto) funksjon. Vi begynner med å vise at ϕ er injektiv. Dette gjør vi ved å vise at om $\phi(a) = \phi(b)$ så er $a = b$. Vi antar at $a > b$. Da får vi

$$\begin{aligned} \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow& \; n \mid a - b \\ \text{og} & \;\; m \mid a - b \\ \Rightarrow& \; n \cdot m \mid a - b, \end{aligned}$$

siden produktet av to tall som kan deles på et tredje også kan deles på det tredje tallet. Så $a - b$ er kongruent med 0 modulo $n \cdot m$. Videre, så siden både a og b må ligge i $\{0, \ldots, (n \cdot m) - 1\}$, så må $a - b$ ligge i $\{0, \ldots, (n \cdot m) - 1\}$, og derfor må $a - b = 0$.

Med andre ord så er $a = b$, og vi har vist injektivitet. For å vise at ϕ er surjektiv så holder det å legge merke til at

$$|\mathbb{Z}_{mn}| = |\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m|.$$

Så, siden disse mengdene har samme kardinalitet, så medfører det at ϕ er injektiv at ϕ også er surjektiv.

Oppgave 4 a) Vi skal finne antall heltall z, hvor $0 \leq z \leq 999$, slik at z er delelig med 4 eller 9 eller 25. Husk at 0 er delelig med alle tall (sjekk definisjonen). Den letteste måten å se hva som foregår i denne oppgaven er å tegne et Venn-diagram. Feks er det 250 tall som er delelig med 4, $(0, 4, 8, 12, \ldots, 996)$. Når vi undersøker alle tre tallene, og produktene deres, så får vi følgende tabell:

tall	antall delelige tall
4	250
9	112
25	40
$4 \cdot 9$	28
$4 \cdot 25$	10
$9 \cdot 25$	5
$4 \cdot 9 \cdot 25$	2

Når vi summer disse på riktig måte, dvs sørger for å telle hvert tall nøyaktig en gang, så får vi svaret på oppgaven:

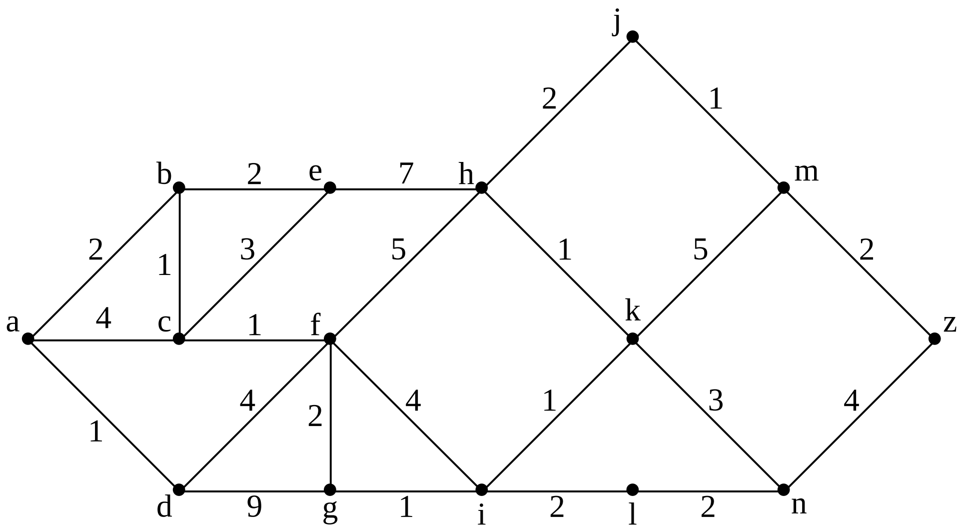
$$250 + 112 + 40 - 28 - 10 - 5 + 2 = 361.$$

b) Nå skal vi finne antall heltall x, hvor $0 \leq x \leq 999$, slik at x er delelig med 30, men ikke delelig med 4, ikke delelig med 9 og ikke delelig med 25. Legg merke til at $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, og at 4, 9 og 25 er kvadratet til henholdsvis 2, 3 og 5. Vi får med andre ord ett tall som er delelig med 4, 9 eller 25 når vi multipliserer 30 med noe som er delelig med 2, 3 eller 5. Tallene som er delelige med 30 er $0, 30, 60, \ldots, 990$, som vi får ved å multiplisere å multiplisere 30 med $0, 1, 2, \ldots, 33$, så spørsmålet er nå hvor mange av disse som ikke er delelige med 2,3 eller 5. De som ikke er delelige med noen av dem er:

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.$$

Konklusjonen er grei, det finnes 9 tall som oppfyller kravene i oppgaven.

Oppgave 5 Finn korteste vei mellom a og z i følgende vektede graf:



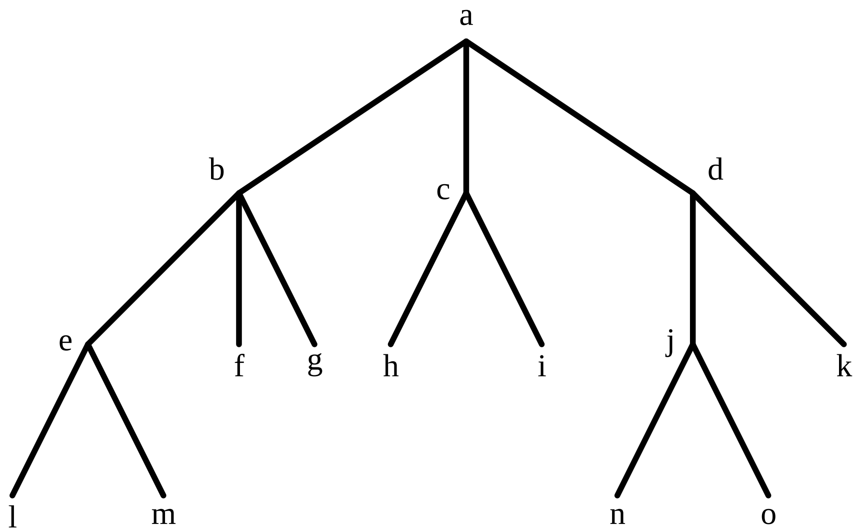
Den sikre måten å gjøre dette på er Dijkstras' algoritme. Det er også lov å prøve seg fram... Konklusjonen skal uansett bli:

a,b,c,f,g,i,k,h,j,m,z eller

a,b,c,f,h,j,m,z,

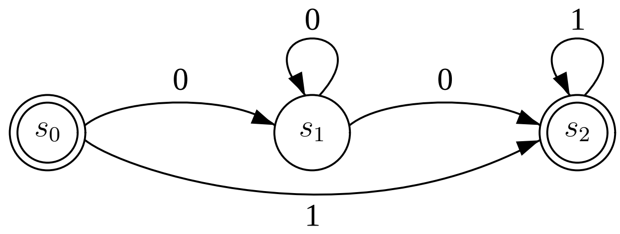
som begge har kostnaden 14.

Oppgave 6 La T være det følgende ordnede treet med rot:



Skriv ned preordningen (preorder traversal) av hjørnene i T. Dette blir: a,b,e,l,m,f,g,c,h,i,d,j,n,o,k.

Oppgave 7 a) Finn språket som gjenkjennes av den ikke-deterministiske endelig tilstandsmaskinen



For å finne dette språket så ser vi på de akseptererende tilstandene til maskinen, s_0 og s_2, og undersøker hvilke strenger som resulterer i at maskinen stopper i en av disse tilstandene.

- Hvis maskinen ikke får noen tegn, så forblir den i s_0, så λ er en akseptert streng.
- Hvis maskinen får en eller flere 1'ere, så blir den i s_2.
- Hvis maskinen får strenger med 0'er, så trengs det 2 eller flere for at maskinen skal gå inn i en aksepterende tilstand, s_2. Herfra så kan den få så mange 1'ere som helst, og forbli i s_2.
- Hvis maskinen får strenger bestående av 0'er etter 1'ere så er ikke dette definert, og blir derfor ikke akseptert.

Oppsumert så får vi at maskinen aksepterer strenger fra språket beskrevet av $\{1\}^* \cup \{00\}\{0\}^*\{1\}^*$.

b) La alfabetet $V = \{0, 1\}$ være gitt og la språket S være gitt ved at $S = \{\underbrace{0\dots0}_{n}\underbrace{1\dots1}_{3n} | n \in \mathbb{N}\}$. Vis at S ikke kan gjenkjennes av noen endelig tilstandsmaskin.

Beviset er ved motsigelse. Anta at det finnes en maskin M som gjenkjenner dette språket, og at denne maskinen har n tilstander. Kjør denne maskinen på $\underbrace{0\dots0}_{n+1}\underbrace{1\dots1}_{3n+3}$. Denne kjøringen vil ende i en aksepterende tilsand. Siden maskinen kun har n tilstander, så vil den i løpet av 0'ene i strengen være i samme tilstand i to forskjellige steg. Hvis vi nummererer stegene i kjøringen, så kan vi kalle disse stegene n_1 og n_2, hvor $n_1 < n_2$. Men da vil maskinen også akseptere strengen $\underbrace{0\dots0}_{1,\dots(n_1-1)}\underbrace{0\dots0}_{n_1,\dots(n_2-1)}\underbrace{0\dots0}_{n_1,\dots(n_2-1)}\underbrace{0\dots0}_{n_2,\dots n+1}\underbrace{1\dots1}_{3n+3}$.

Dette er en selvmotsigelse, så antagelsen om at slike strenger er gjenkjennbare må være feil.