Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG KONT 07, TMA4140

Oppgave 1 (10%) Utsagnet $\big((\neg(p \wedge q)) \vee r\big) \to \big(q \wedge \neg p\big)$ får sannhetstabellen:

p	q	r	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q)) \vee r$	$(q \wedge \neg p)$	$((\neg(p \wedge q)) \vee r) \to (q \wedge \neg p)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0

Oppgave 2 (10%) Finn det minste positive heltall x som løser

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 1 \pmod 7 \\ x &\equiv 11 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Løsning: Vi starter med å finne inverser til $M_1 = 7 \cdot 17$ modulo 17, $M_2 = 3 \cdot 17$ modulo 7 og $M_3 = 3 \cdot 7$ modulo 3. Vi har de følgende kongruensene

$$\begin{aligned} M_1 = 119 &\equiv 2 \pmod 3 \\ M_2 = 51 &\equiv 2 \pmod 7 \\ M_3 = 21 &\equiv 4 \pmod{17}, \end{aligned}$$

og disse lavere tallene gjør det lettere å se de inversene vi vil ha. De ønskede inversene er hhv 2, 4 og -4, for henholdsvis $M_1 = 7 \cdot 17$ modulo 17, $M_2 = 3 \cdot 17$ modulo 7 og $M_3 = 3 \cdot 7$ modulo 3. Når vi så ganger inn verdiene fra det originale systemet så får vi at

$$2 \cdot 119 \cdot 2 + 1 \cdot 51 \cdot 4 + 11 \cdot 21 \cdot (-4) = -244 \equiv x \pmod{3 \cdot 7 \cdot 17}.$$

-244 er ett negativt tall, vi legger til $3 \cdot 7 \cdot 17$, og får 113, som er svaret på oppgaven, det laveste positive heltall som løser systemet.

Oppgave 3 (10%) Benytt matematisk induksjon til å vise at for alle heltall $n \geq 1$ så er

$$\sum_{i=1}^{n}(3i+2) = \frac{1}{2}(3n^2 + 7n).$$

Løsning: Basissteget er for $n = 1$. $3 \cdot 1 + 2 = 5$ er høyre side. Venstre side er $\frac{1}{2}(31^2 + 7 \cdot 1) = \frac{1}{2}10 = 5$, så disse er like. Induksjonssteget: Anta at

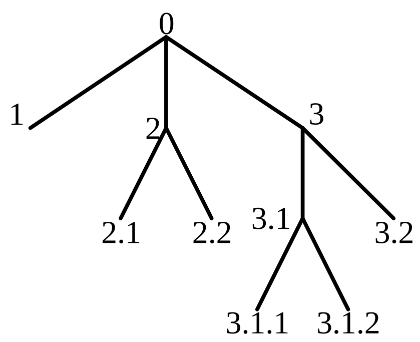
$$\sum_{i=1}^{k}(3i+2) = \frac{1}{2}(3k^2 + 7k).$$

Vi ser nå på tilfellet $k+1$, og viser at det vil holde med denne antagelsen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(3i+2) &= \sum_{i=1}^{k}(3i+2) + 3(k+1) + 2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}(3i+2) + 3k + 5 \\
&= \frac{1}{2}(3k^2 + 7k) + 3k + 5 \\
&= \frac{1}{2}(3k^2 + 7k + 6k + 10) \\
&= \frac{1}{2}((3k^2 + 6k + 3) + (7k + 7)) \\
&= \frac{1}{2}(3(k+1)^2 + 7(k+1)),
\end{aligned}$$

og vi har vist at påstanden holder ved hjelp av matematisk induksjon.

Oppgave 4 (10%) Dette er et tre med rot (rooted tree), hvor rota er merket r. Merk alle hjørnene i treet, inklusive rota, etter det universelle adresse-system (universal adress system). **Løsning**:



Oppgave 5 (10%) Du skal nå tegne 4 forskjellige rettede grafer. Hver graf skal ha *4 hjørner*. Hver av de 4 grafene skal ha forskjellige egenskaper:

Graf 1 Skal ikke ha hverken en Hamilton-krets eller en Euler-krets.

Graf 2 Skal ha en Hamilton-krets, men ikke en Euler-krets.

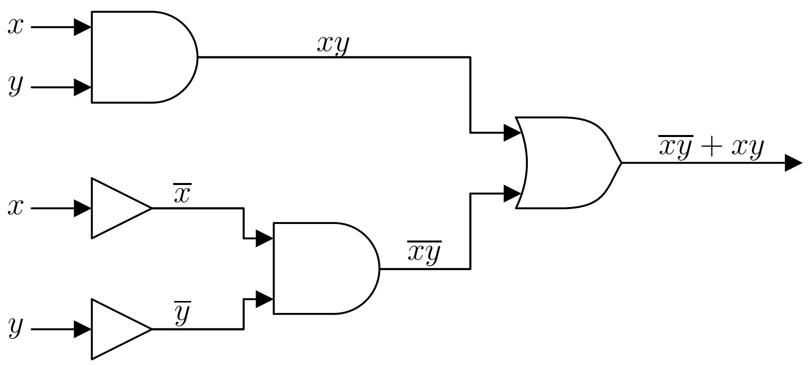
Graf 3 Skal ha en Euler-krets, men ikke en Hamilton-krets.

Graf 4 Skal ha både en Hamilton-krets og en Euler-krets.

Løsning: Det er mange muligheter her, ett mulig eksempel på hver av de 4 typene er disse (fra venstre mot høyre):

Oppgave 6 (10%) I denne oppgave skal du lage *en logisk krets*. Denne logiske kretsen skal kontrollere en lampe, hvor lampen skal ha to brytere.

Kretsen skal fungere slik at uansett hvilken bryter du trykker på når lampen er av, skrur lampen på, og uansett hvilken bryter du trykker på når lampen er på, skrur lampen av.
Løsning: Vi kaller de to bryterne x og y, og kretsen skal skifte output når output fra en av bryterne endres. Følgende krets løser oppgaven:



Oppgave 7 a) (5%) En delvis ordning (partial ordering) er en relasjon som er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Skriv ned definisjonene på at en relasjon er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*.

Løsning: En relasjon er refleksiv dersom alle elementer i den underliggende mengden er relatert til seg selv. En relasjon $\preccurlyeq$ er antisymmetrisk dersom $x \preccurlyeq y$ og $y \preccurlyeq x$ alltid medfører at $x = y$. En relasjon er transitiv dersom $x \preccurlyeq y$ og $y \preccurlyeq z$ alltid medfører $x \preccurlyeq z$.

b) (10%) Vis at relasjonen $\preccurlyeq$ på S, gitt ved at

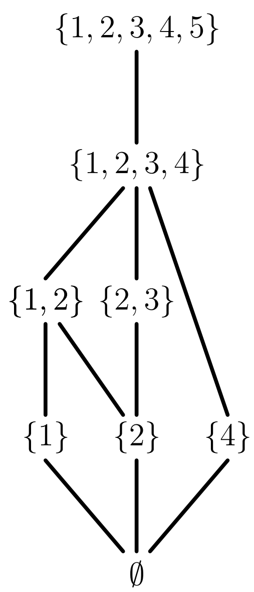
$$(S, \preccurlyeq) = \Big(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}, \subseteq\Big)$$

er en delvis ordning.

Løsning: Refleksivitet: Følger av definisjonen av mengder, en mengde er alltid en undermengde av seg selv. Anti-symmetri: Hvis to mengder A og B er slik at $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$ så må de ha nøyaktig de samme elementene og da er per definisjon $A = B$ som mengder. Transitivitet: Fra definisjon av undermengder så har vi at dersom $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ så ligger alle elementene i mengden A inne i mengden C ,og derfor er $A \subseteq C$.

c) (10%) Tegn Hasse-diagrammet til den delvise ordningen gitt av $(S, \preccurlyeq)$ definert i oppgave b).

Løsning:



d) (5%) Hva er det største elementet (greatest element) til $(S, \preccurlyeq)$? ($(S, \preccurlyeq)$ er fremdeles som definert i oppgave b).)

Løsning: Det største elementet i S med ordningen gitt av $\subseteq$ er det elementet som *inneholder* alle de andre elementene i mengden. Dette er mengden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, som er det største elementet.

Oppgave 8 (10%) En funksjon $f : A \to \mathbb{Z}$, hvor $A \subseteq \mathbb{Z}$ er definert ved at $f(x) = x \ \mathbf{mod}\ 11$. Du skal nå bestemme hvilke heltall mengden A må bestå av for at funksjonen f skal ha en bestemt egenskap: Bestem A slik at f er 1-1(one-to-one) *hvis og bare hvis* A er slik du har bestemt?

Løsning: Funksjonen f vil sende et hvilket som helst heltall til ett av heltallene $0, 1, \cdots, 10$. Mengden $\{0, 1, \cdots, 10\}$ er på 11 elementer. For at f nå skal være 1-1 så må derfor $|A| \leq 11$, dvs A må inneholde fra og med 0 til og med 11 elementer. I tillegg kan ikke A inneholde mer enn ett heltall x med hver mulige rest du får når du deler x med 11. Dette betyr at for to (ulike) heltall $x, y \in A$ så må $x \mathbf{\ mod\ } 11 \neq y \mathbf{\ mod\ } 11$. Disse to kravene er i et hvis og bare hvis forhold til at f er 1-1.