Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Haaken A. Moe
92650655

Bokmål

LF, KONTINUASJONSEKSAMEN TMA4140 2008

Oppgave 1 (10%) La p, q og r være primitive utsagn. Sett opp sannhetsverditabellen til det logiske utsagnet

$$\big(\neg(p \wedge q) \rightarrow q\big) \vee (r \wedge \neg p).$$

Skriv ned definisjonen på en kontradiksjon (contradiction). Er utsagnet over en kontradiksjon?

p	q	r	$\neg(p \wedge q) \rightarrow q$	$r \wedge \neg p$	$\big(\neg(p \wedge q) \rightarrow q\big) \vee (r \wedge \neg p)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

En kontradiksjon er et utsagn som aldri er sant, uansett sannhetsverdi på de primitive utsagnene som er involvert. Utsagnet over er ikke en kontradiksjon.

Oppgave 2 (10%) Vis ved induksjon at 21 går opp i

$$4^{n+1} + 5^{2n-1}$$

for alle heltall $n \geq 1$.

Basissteg: Vi ser på $n = 1$. Da får vi $4^{1+1} + 5^{2-1} = 16 + 5 = 21$, som jo absolutt går opp i 21. Basissteget er dermed komplett.

Induksjon: Induksjonsantagelsen er at for $k \geq 1$ så er $4^{k+1} + 5^{2k-1}$ delelig med 21. Vi vil så vise at dette medfører at $21 \mid 4^{(k+1)+1} + 5^{2(k+1)-1}$. Vi regner:

$$\begin{aligned} 4^{(k+1)+1} + 5^{2(k+1)-1} &= 4 \cdot 4^{k+1} + 5^2 \cdot 5^{2k-1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + 25 \cdot 5^{2k-1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + (21+4) \cdot 5^{2k-1} \\ &= 4 \cdot (4^{k+1} + 5^{2k-1}) + 21 \cdot 5^{2k-1}. \end{aligned}$$

Det vi har fått nå er delelig med 21, siden det er en sum av to ledd som er delelige med 21. Det første leddet er delelig med 21 pr induksjonsantagelse, mens det andre leddet har 21 som faktor. Så etter teoremet om matematisk induksjon så er uttrykket øverst delelig med 21 for alle heltall $n \geq 1$.

Oppgave 3 Vi ser på mengden $S = \{i, j, k, l, m\}$.

a) (5%) Skriv ned definisjonen på en partisjon (partition) av en mengde, og gi et eksempel på en mulig partisjon av S.

En partisjon av en mengde er en samling av undermengder av mengden som alle har parvis tomt snitt (intersection) og som tilsammen inneholder alle elementer i den store mengden.

b) (5%) En ekvivalensrelasjon $\mathcal{R}$ på mengden S er gitt ved at

$$\mathcal{R} = \{(i,i), (m,l), (j,j), (i,j), (k,k), (l,m), (j,i), (l,l), (m,m)\}.$$

Angi hvilken partisjon av S relasjonen $\mathcal{R}$ gir opphav til.

Relasjonen gir opphav til partisjonen $\{\{i,j\}, \{k\}, \{l,m\}\}$.

c) (10%) En annen relasjon $\mathcal{S}$ på mengden S er gitt ved

$$\mathcal{S} = \{(i,l), (k,m), (l,m), (m,k)\}.$$

Angi den refleksive tillukningen (closure) av $\mathcal{S}$, den transitive tillukningen av $\mathcal{S}$ og den symmetriske tillukningen av $\mathcal{S}$.

Refleksiv: $\{(i,l), (k,m), (l,m), (m,k), (i,i), (j,j), (k,k), (l,l), (m,m)\}$
Symmetrisk: $\{(i,l), (k,m), (l,m), (m,k), (l,i), (m,l)\}$.
Transitiv: $\{(i,l), (k,m), (l,m), (m,k), (i,m), (l,k), (m,m), (k,k), (i,k), (l,m)\}$

Oppgave 4 (10%) Finn alle heltall x som løser

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 2 \pmod 5\\
x &\equiv 4 \pmod 6\\
x &\equiv 10 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

Siden 5,6 og 11 er parvis primiske tilsier det kinesiske restteoremet at løsningen er alle x som er kongruente med $a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3$ modulo $5 \cdot 6 \cdot 11 = 330$. Vi har at $M_1 = 6 \cdot 11$, $M_2 = 5 \cdot 11$ og $M_3 = 5 \cdot 6$. Inversene til disse modulo hhv 5,6 og 11 er hhv 1,1 og 7. Dette gir at x må være kongruent med 142 modulo 330, og alle heltall som løser systemet er gitt ved

$$x = 142 + 330k, k \in \mathbb{Z}.$$

Oppgave 5 (10%) Løs rekurrensrelasjonen (recurrence relation)

$$a_n = 9a_{n-1} - 20a_{n-2},$$

for $n \geq 3$, med initalbetingelsene $a_1 = 23$ og $a_2 = 107$.

Denne rekurrensrelasjonen har $r^2 - 9r + 20$ som karakteristisk ligning, og denne er null når $r = 4$ eller 5. Som betyr at

$$a_n = \alpha 4^n + \beta 5^n$$

løser rekurrensrelasjonen. Setter vi inn hhv $n = 1$ og $n = 2$ og benytter initialbetingelsene så får vi

$$a_n = 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n.$$

Oppgave 6 (10%) Lag en deterministisk endelig tilstandsautomat som aksepterer språket

$$\{010111, 00011\}^*.$$

Beskriv automaten med enten et tilstandsdiagram (tegning) eller en tilstandstabell.

Maskinen får følgende tilstandstabell (aksepterende tilstander er merket med *):

	Tilst	Tilst
Input	0	1
s_0^*	s_1	s_{11}
s_1	s_7	s_2
s_2	s_3	s_{11}
s_3	s_{11}	s_4
s_4	s_{11}	s_5
s_5	s_{11}	s_6
s_6^*	s_1	s_{11}
s_7	s_8	s_{11}
s_8	s_{11}	s_9
s_9	s_{11}	s_{10}
s_{10}^*	s_1	s_{11}
s_{11}	s_{11}	s_{11}

Oppgave 7 a) (5%) La f og g være to funksjoner som går fra og til de reelle tallene. Skriv ned definisjonen på at f er $\mathcal{O}(g)$.

Definisjonen er at f er $\mathcal{O}(g)$ hvis finnes reelle tall C og k (vitnene) slik at for alle $x > k$ er $f(x) \leq Cg(x)$.

b) (5%) Vis at $f(x) = 4x^3 + x^2 + 1000$ er $\mathcal{O}(x^3)$ ved å finne vitner og bruke disse til å vise at definisjonen holder.

Vi velger $k = 1$ og regner (husk at vi nå antar at $x > k$):

$$\begin{aligned} 4x^3 + x^2 + 1000 &< 4x^3 + x^3 + 1000x^3 \\ &= (4 + 3 + 1000)x^3 \\ &= 1007x^3 \end{aligned}$$

Med andre ord, $f(x)$ er $\mathcal{O}(x^3)$ med vitnene 1 og 1007. Dette er absolutt ikke det eneste mulige paret av vitner som løser oppgaven.

Oppgave 8 (10%) Binomial teoremet. Finn koeffisientene til

i) x^6y^7 i ekspansjonen av $(x + 3y)^{13}$ **ii)** x^9 i ekspansjonen av $(2 - 3x)^{13}$.

Koeffisientene blir **i)** $\binom{13}{6} \cdot 3^7$ og **ii)** $\binom{13}{9} \cdot 2^4 \cdot (-3)^9$.

Oppgave 9 (10%) Bruk ordnede par til å beskrive de mulige delvise ordningene (partial orderings) av mengden $S = \{1, 2, 3\}$.

Det er 'bare' å skrive dem opp (alle refleksive, antisymmetriske og transitive relasjoner på S):
$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(2,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(3,2)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(3,1)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,2)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(2,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,2),(1,2)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(1,3),(2,3)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,1),(2,1)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(1,2),(3,2)\}$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,1),(3,1)\}$