Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under kontinuasjonseksamen:
Asgeir Steine Telefon: 73 59 16 25

Kontinuasjonseksamen i TMA4140 DISKRET MATEMATIKK

10. august 2009
Tid: 09.00-13.00
Bokmål
Sensur 31. august 2009

Hjelpemidler: Bestemt enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling

Oppgave 1

Bevis ved induksjon formelen

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

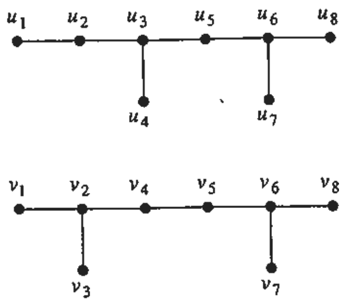
der $n \geq 1$.

Oppgave 2 Finn den generelle løsningen av systemet $(*)$ bestående av kongruenslikningene

$$(*)\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

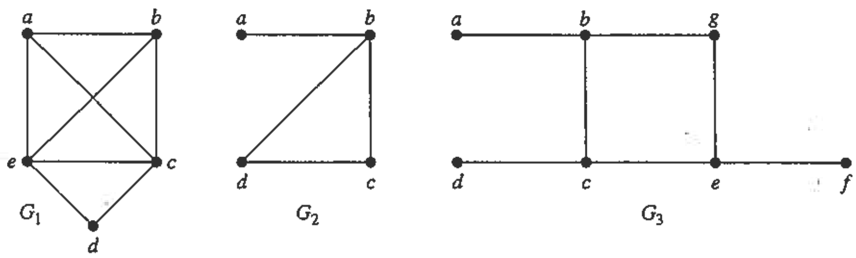
Oppgave 3

a) Gi et argument for at de to grafene i Figur 1 ikke er isomorfe.



Figur 1.

b) Hvilke av de tre enkle grafene i Figur 2 har en Hamilton krets ("circuit")? Hvilke har en Hamilton sti ("path")?

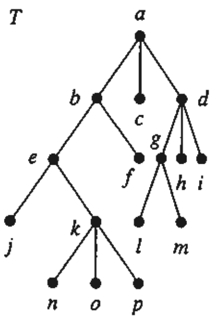


Figur 2.

Oppgave 4

a) La T være det rotfestede treet i Figur 3, med nodene merket med bokstavene

$a, b, c, \cdots, o, p$. List nodene i T i rekkefølge etter postordningssystemet.



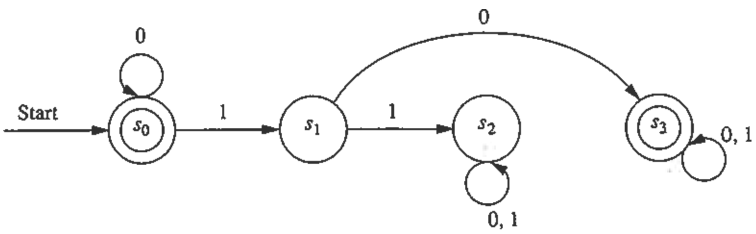
Figur 3.

b) Tegn det rotfestede treet som representerer uttrykket

$$((x+y) \uparrow 2) + ((x-4)/3)$$

Oppgave 5

a) Bestem det regulære språket som gjenkjennes ("recognizes") av den endelige tilstandsautomaten i Figur 4.



Figur 4.

b) Konstruer en (ikke-deterministisk) endelig tilstandsautomat som gjenkjenner mengden av binære strenger (dvs. strenger bestående av 0'er og 1'ere) som inneholder 3 påfølgende 1'ere.

Oppgave 6

a) Gitt rekurrensrelasjonen

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \; ; \; n \geq 2,$$

med begynnelsesbetingelsene $a_0 = 2, a_1 = 7$. Hva er a_{10}?

b) Hva er den binære ekspansjonen av $(241)_{10}$?

c) Hva er koeffisienten til x^7 i ekspansjonen av det binomiske uttrykket $(3 - 2x)^{11}$?

Oppgave 7

a) Avgjør om

$$(\neg q \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg p$$

er en tautologi.

b) Bestem om $\forall x(P(x) \longrightarrow Q(x))$ og $\forall x P(x) \longrightarrow \forall x Q(x)$ er logisk ekvivalente. Grunngi ditt svar.

Eksamen TMA4140 – Diskret matematikk August 2009

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ Formelen er riktig for $n = 1$. Anta at formelen er riktig for $n = k$, altså

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Legg til $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ $\left(= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$ på begge sider. Da får vi

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

$\boxed{2}$ $M = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$; $M_1 = \frac{M}{3} = 20$, $M_2 = \frac{M}{4} = 15$, $M_3 = \frac{M}{5} = 12$.

$$\left.\begin{array}{l} 20\cdot y_1 \equiv 1 \mod 3 \\ 15\cdot y_2 \equiv 1 \mod 4 \\ 12\cdot y_3 \equiv 1 \mod 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 3 \end{array}$$

Løsningen av $(*)$ er da, for $k \in \mathbb{Z}$,

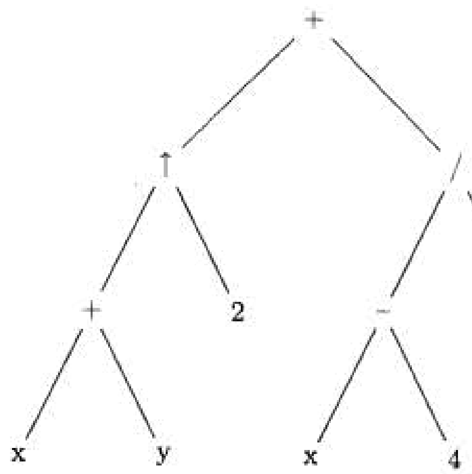
$$\begin{aligned} x &= 2\cdot 20\cdot 2 + 1\cdot 15\cdot 3 + 3\cdot 12\cdot 3 + k\cdot 60 \\ &= 233 + k\cdot 60 \\ &= 53 + k\cdot 60. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ **a)** u_3 og u_6 må avbildes i v_2 og v_6 ved en eventuell isomorfi (siden disse nodene er av grad 3). Siden u_3 og u_6 har en felles nabonode, men v_2 og v_6 ikke har det, så kan ikke grafene være isomorfe.

b) G_1 har en Hamiltonkrets a, b, c, d, e, a. G_2 har ingen Hamiltonkrets siden a er en node med grad 1. Derimot har G_2 en Hamiltonsti, siden enhver sti som inneholder alle nodene må inneholde en av kantene $\{a, b\}$, $\{e, f\}$ og $\{c, d\}$ mer enn en gang. G_3 har ingen Hamiltonsti, siden en slik måtte inneholde en av kantene $\{a,b\}$, $\{e,f\}$ eller $\{c,d\}$ mer enn en gang.

$\boxed{4}$ **a)** jnopkefbclmghida

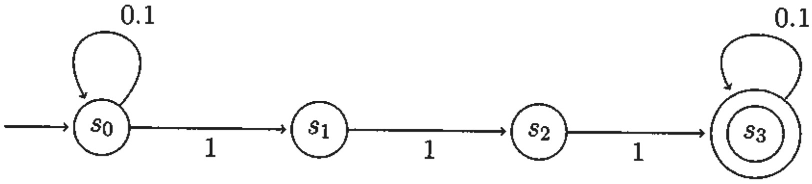
b)



5 a)

$$L(M_3) = \{O^n,\ O^n10x \mid n = 0, 1, 2, \ldots,\ \text{der } x \text{ er en vilkårlig streng}\}.$$

b)



6 a) 3071

b) 11110001

c)

$$-10368\binom{11}{4} = -10368\binom{11}{7} = -3421440.$$

7 a) Tautologi (sees ved sannhetstabell).

b) De er ikke logisk ekvivalente, siden dersom $P(x)$ er en utsagnsfunksjon som noen ganger er sann og noen ganger usann, og dersom $Q(x)$ er en utsagnsfunksjon som alltid er usann, så er $\forall x(P(x) \to Q(x))$ usann, mens $\forall xP(x) \to \forall xQ(x)$ er sann.