Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under midtsemesterprøven:
Christian Skau
73591755

Bokmål

MIDTSEMESTERPRØVE I TMA4140 Diskret matematikk

13. oktober 2017
Tid: 8.15 – 9.45

Hjelpemidler: Kode C.
Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt enkel kalkulator tillatt.

Fasit - det står en sort prikk bak riktig svar. (NB! Rekkefølgen på oppgavesettene varierte.)

INSTRUKSJONER:

Denne prøven er en flervalgsoppgave. Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siste siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres. Det er bare siden med svarkupongen som skal leveres.

Det vil være minst ett riktig svar-alternativ for hver oppgave, men det kan være flere. Det er totalt 20 riktige svar i hele oppgavesettet og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Riktig satte kryss gir 1 poeng. Krysser du av galt trekkes du ikke for det. Setter du flere enn 20 kryss trekkes du 3 poeng per kryss mer enn 20.

Oppgave 1 Hva er koeffisienten til x^5y^3 i ekspansjonen av $x(-2x+5y)^7$?

Alt 1) $-\binom{7}{3}2^4 5^3$

Alt 2) 70000 •

Alt 3) $-\binom{7}{4}2^4 5^3$

Alt 4) $\binom{7}{5}2^5 5^3$

Oppgave 2 Hvilke av følgende utsagn er tautologier?

Alt 1) $(t \to (\neg u \wedge v)) \to ((v \to (u \vee q)) \wedge t)$

Alt 2) $((\neg t \wedge u) \to (t \wedge v)) \to (\neg u \vee s)$

Alt 3) $((s \wedge t) \to r) \leftrightarrow ((t \to r) \wedge (s \to r))$

Alt 4) $(s \to (r \wedge \neg p)) \to ((p \to (\neg r \vee q)) \vee \neg s)$ •

Oppgave 3 Gitt rekurrensrelasjonen

$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}; \quad n \geq 2$$

med initialbetingelsene $a_0 = 0, a_1 = 1$. Hva er a_9?

Alt 1) 2653

Alt 2) 141361

Alt 3) 40261 •

Alt 4) 8425

Oppgave 4 Hvor mange heltallsløsninger finnes det til ligningen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

når $x_1 \geq -1$, $x_2 \geq 3$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq -2$?

Alt 1) $C(12, 4)$

Alt 2) 715

Alt 3) 66

Alt 4) 220 •

Oppgave 5 La universalmengden være de hele tallene $\{2, 3, 4, \dots\}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\exists m\ \forall a\ \exists b\ (m \mid (a^m - b))$ •

Alt 2) $\exists m\ \forall a\ (m \mid (a^{m-1} - 1))$

Alt 3) $\forall m\ \exists a\ \exists b\ ((2m+1) \mid (a^2 - b^2))$ •

Alt 4) $\forall m\ \exists a\ \left(a \mid \binom{a}{m}\right)$ •

Oppgave 6 La $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, der $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $f(n) = (3n^3 - 7n - 13)\log(n^5 + n + 1)$ er $\Theta(n^4 \log n)$.

Alt 2) $f(n) = \frac{2n^4 - 3n^2 - 5}{\log(5n^5 + n + 1)}$ er $O(n^3\sqrt{n})$.

Alt 3) $f(n) = (5n^2 + 7n) + n\log(3n^2 + n + 5)$ er $\Theta(n^2 + n)$. •

Alt 4) $f(n) = \frac{n^3 - 2n^2 - 7}{n\sqrt{n}}$ er $O(n \log n)$.

Oppgave 7 Hva er den hexadesimale (dvs. basistall 16) framstillingen av summen

$$(ABCDEF)_{16} + (FEDCBA)_{16}?$$

Alt 1) $(1AAAAA9)_{16}$ •

Alt 2) $(1BAAAA9)_{16}$

Alt 3) $(1CAAAA9)_{16}$

Alt 4) $(FAAAA9)_{16}$

Oppgave 8 På hvor mange måter kan 50 personer plasseres i 5 forskjellige køer A, B, C, D, E (der noen av køene kan være tomme), der rekkefølgen i hver kø skal tas i betraktning?

Alt 1) $\frac{55!}{5!}$

Alt 2) $\frac{54!}{4!}$ •

Alt 3) $\binom{54}{4}$

Alt 4) $\binom{55}{5}$

Oppgave 9 La $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være definert ved $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $g(x) = \lceil x \rceil$. (Her betegner $\lfloor x \rfloor$ (henholdsvis $\lceil x \rceil$) det største (henholdsvis minste) hele tallet mindre enn eller lik (henholdsvis større enn eller lik) x.) Hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $f + g$ er injektiv

Alt 2) f^2 (gitt ved $f^2(x) = f(x)^2$) er surjektiv

Alt 3) $g - f$ er surjektiv

Alt 4) $f + g$ er surjektiv •

Oppgave 10 Hvor mange strenger er det av lengde fire bestående av desimalsifre (altså sifrene $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) slik at hver streng inneholder nøyaktig tre like sifre?

Alt 1) 720

Alt 2) 180

Alt 3) 90

Alt 4) 360 •

Oppgave 11 La universalmengden være de reelle tallene $\mathbb{R}$. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ ((x \leq y) \to (zx < y))$

Alt 2) $\forall z\ \forall x\ \exists y\ ((x^2 < y) \to (x^2 < z))$ •

Alt 3) $\exists z\ \exists x\ \forall y\ ((y^2 - 1)x = z - 1)$ •

Alt 4) $\forall z\ \exists x\ \forall y\ ((|y| < x^2 + 1) \to ((y < z) \vee (y > z)))$

Oppgave 12 Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) La p være et odde primtall og la $a \geq 2$ være et partall. Da vil $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Alt 2) La $a, b \in \mathbb{Z}^+$ dele 2431. Da finnes $s, t \in \mathbb{Z}$ slik at $sa + tb = 4862$. •

Alt 3) La $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a, b \geq 2$, være relativt primiske. Da finnes $s, t \in \mathbb{Z}$ slik at $s(a+1) + t(b+2) = 1$.

Alt 4) $23939^{419} \equiv -1 \pmod{420}$ •

Oppgave 13 La A, B, C, D være ikke-tomme delmengder av mengden X. Hvilke av følgende mengdeteoretiske identiteter er riktige?

Alt 1) $A \cap \overline{(\overline{B} \cap A)} = A \cap B$ •

Alt 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ •

Alt 3) $D - (A - B) = (D - A) - B$

Alt 4) Dersom $D \cup A = B \cup A$ og $D \cap A \subset B \cap A$, så er $D = B$.

Oppgave 14 Hvor mange injektive funksjoner er det fra en mengde med tre elementer til en mengde med fem elementer?

Alt 1) 60 •

Alt 2) $\frac{5!}{3!}$

Alt 3) $\binom{5}{3}$

Alt 4) $5!$

Oppgave 15 Hvor mange strenger av lengde 8 med symbolene $\{a, b, c, d\}$ finnes det dersom strengene skal starte med acd eller ende med bb?

Alt 1) 1264

Alt 2) 20224

Alt 3) 5056 •

Alt 4) 5120

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 20 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng. Du trekkes ikke for å sette et galt kryss, men setter du flere enn 20 kryss vil du trekkes 3 poeng per kryss mer enn 20. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Oppgave 1				
Oppgave 2				
Oppgave 3				
Oppgave 4				
Oppgave 5				
Oppgave 6				
Oppgave 7				
Oppgave 8				
Oppgave 9				
Oppgave 10				
Oppgave 11				
Oppgave 12				
Oppgave 13				
Oppgave 14				
Oppgave 15				