Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Christian Skau, telefon 73591755

Eksamen i TMA4140 DISKRET MATEMATIKK

17. desember 2010
Tid: 09.00-13.00
Bokmål
Sensur 14. januar 2011

Hjelpemidler: Hjelpemiddelkode C. Bestemt enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling

Eksamenssettet består av to deler: Oppgavene 1 til 6 med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye) utgjør en del, og oppgave 7, som er en flervalgsoppgave utgjør den andre delen. Oppgave 7 teller 50%, og oppgavene 1 til 6 teller 50%.
Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong der dine svar skal krysses av. Denne siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de seks første oppgavene.

Oppgave 1 Bevis ved induksjon likheten

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \text{ for } n \geq 1.$$

Oppgave 2

a) Representer uttrykket

$$[(x+y)^3 \cdot (y - (3+x))] - 5$$

ved et binært tre.

b) Skriv uttrykket i a) i postfix notasjon.

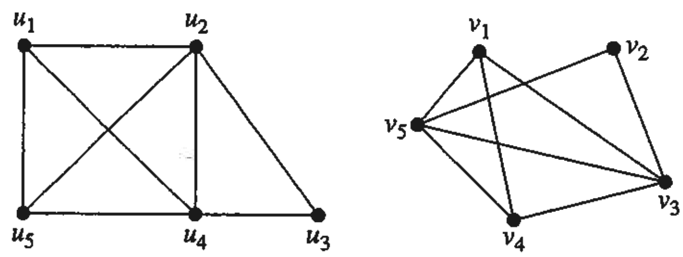
Oppgave 3

Finn det minste positive heltallet x som løser kongruensligningene

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Gi en begrunnelse for om de to grafene i Figur 1 er isomorfe eller ikke, og avgjør om de har Eulerveier, Eulerkretser, Hamiltonveier eller Hamiltonkretser.



Figur 1.

Oppgave 5

a) Formulér så presist du kan sammenhengen som eksisterer mellom regulære språk, regulære uttrykk, regulære grammatikker og endelige tilstandsautomater (både deterministiske og ikke-deterministiske).

b) Gitt den regulære grammatikken $G = (V, T, S, P)$, der $V = \{S, A, 0, 1\}, T = \{0, 1\}$ og produksjonene (reglene) P er gitt ved:

$$S \to 0S,\ S \to 1A,\ S \to 1,\ A \to 1A,\ A \to 1.$$

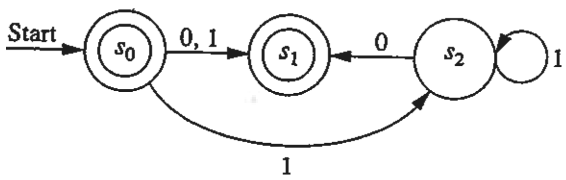
Gi et regulært uttrykk for språket $L(G)$ som G genererer.

Oppgave 6

a) Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat med høyst 4 tilstander som gjenkjenner språket gitt ved det regulære uttrykket 11*00*.

b) Gi et regulært uttrykk for språket $L(M)$ som gjenkjennes av den ikke-deterministiske endelige tilstandsautomaten M i Figur 2.

c) Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat som gjenkjenner samme språket som M i b).



Figur 2.

Oppgave 7

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siden skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første seks oppgavene. Det vil være minst ett, men gjerne flere rette svar-alternativer for hver oppgave. Det er totalt 10 rette svar og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Rett kryss gir 1 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng pr. kryss mer enn 10.

Deloppgave 1.

Hva er $+ - *2\,3\,5 / \uparrow 2\,3\,4$ der formelen er skrevet i prefix notasjon?

Alt 1) 6

Alt 2) 13

Alt 3) 4

Alt 4) 3

Deloppgave 2.

Hva er koeffisienten til x^3y^3 i ekspansjonen av $(2x - 3y)^6$?

Alt 1) -4860

Alt 2) -4320

Alt 3) 4860

Alt 4) 4320

Deloppgave 3.

Hva er $(10685)_{10}$ i det oktale systemet (dvs. grunntallet 8)?

Alt 1) $(14875)_8$

Alt 2) $(24675)_8$

Alt 3) $(34685)_8$

Alt 4) $(24674)_8$

Deloppgave 4.

Hvor mange binære strenger av lengde 10 inneholder nøyaktig fire $1'$ere?

Alt 1) 210

Alt 2) 386

Alt 3) 848

Alt 4) 252

Deloppgave 5.

Hvilke av følgende logiske utsagn er en tautologi?

Alt 1) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$

Alt 2) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

Alt 3) $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r))$

Alt 4) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

Deloppgave 6.

Gitt rekurrensrelasjonen $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}; n \geq 2$, med initialbetingelsene $a_0 = 1, a_1 = -8$. Hva er a_{10}?

Alt 1) -118784

Alt 2) -1900544

Alt 3) -486539264

Alt 4) -30408704

Deloppgave 7.

La $G = (V, T, S, P)$ være den regulære grammatikken, der $V = \{0, 1, A, B, S\}$, $T = \{0, 1\}$ og P er gitt ved:

$$S \to 0A,\ S \to 1A,\ A \to 0B,\ B \to 1A,\ B \to 1.$$

Hvilke av følgende regulære uttrykk beskriver språket $L(G)$ generert av G?

Alt 1) $(0 \cup 1)01(01)^*$.

Alt 2) $(0 \cup 1)(01)^*$.

Alt 3) $001(01)^* \cup 101(01)^*$.

Alt 4) $01(01)^*$.

Deloppgave 8.

Hvilke av følgende er garantert riktig?

Alt 1) Restleddet når 78911 deles med 23 er 11.

Alt 2) $a^{22} \equiv 1 \pmod{23}$ for alle negative hele tall a.

Alt 3) $(28)^{145} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 13)$

Alt 4) $ca \equiv cb \pmod{7}$ medfører $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 7)$, der $a, b, c, \in \mathbf{Z}$ og $c > 7$.

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir -3 poeng. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				

TMA 4140 – Diskret Matematikk

(Løsningsforslag til eksamensettet desember, 2010.)

Oppgave 1 $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);\ n \geq 1.$ (*)

Vi ser at (*) er riktig for $n=1$, idet venstre- og høyresiden er lik 2.

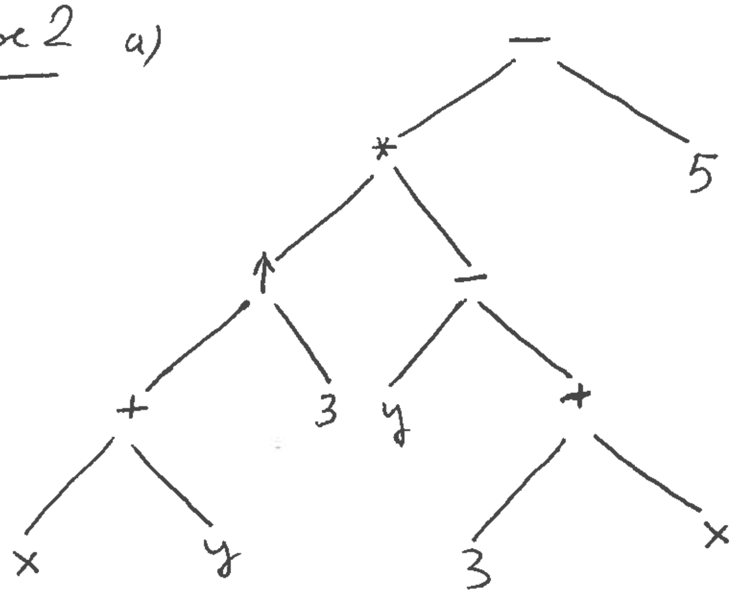
Anta (*) riktig for $n=k$. For $n=k+1$ får vi:

$$\underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + k(k+1)} + (k+1)(k+2) =$$

$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left[\frac{k}{3}+1\right]$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$ Altså er (*) riktig for $n=k+1$, og dermed er (*) riktig for alle n.

Oppgave 2 a)



b) $x\,y + 3 \uparrow y\,3\,x + - * 5 -$

Oppgave 3   2, 3, 5 og 11 er parvis relativt primiske, og derfor kan ligningssettet løses ved det kinesiske resttøremet.

$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$

$M_2 = \frac{330}{2} = 165$, $1 \cdot 165 \equiv 1 \pmod{2}$

$M_3 = \frac{330}{3} = 110$, $2 \cdot 110 \equiv 1 \pmod{3}$

$M_5 = \frac{330}{5} = 66$, $1 \cdot 66 \equiv 1 \pmod{5}$

$M_{11} = \frac{330}{11} = 30$, $7 \cdot 30 \equiv 1 \pmod{11}$

Den generelle løsningen til ligningssettet er:

$x = 1 \cdot 165 \cdot 1 + 2 \cdot 110 \cdot 2 + 3 \cdot 66 \cdot 1 + 4 \cdot 30 \cdot 7 + 330k$

$= 1643 + 330k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

Velger man $k = -4$, så får man den ønskede løsningen: $\underline{\underline{x = 323}}$

Oppgave 4   Ingen av grafene har Eulerkretser, men de har begge Eulerveier og Hamiltonkretser. Grafene er isomorfe. Flere isomorfier er mulige. Et eksempel er

$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_3, f(u_3) = v_2, f(u_4) = v_5, f(u_5) = v_4$

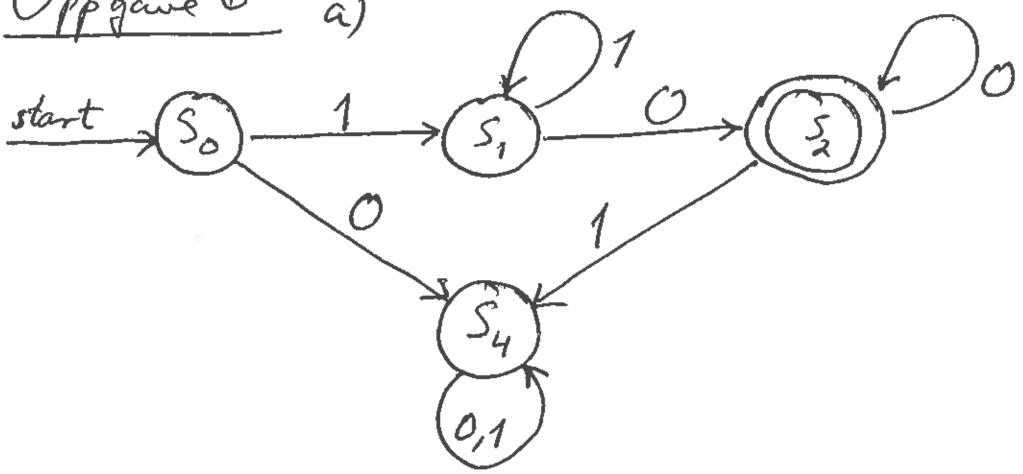
Oppgave 5

a) Et regulært språk er pr. definisjon et språk som genereres av en regulær grammatikk. Et språk er regulært hvis og bare hvis det kan representeres ved et regulært uttrykk. Dessuten er et språk regulært hvis og bare hvis det gjenkjennes av en endelig (deterministisk eller ikke-deterministisk) tilstandsautomat.

b) 0^*11^* (eller $00^*11^* \cup 11^*$, eller $0^*111^* \cup 0^*1$)

Oppgave 6

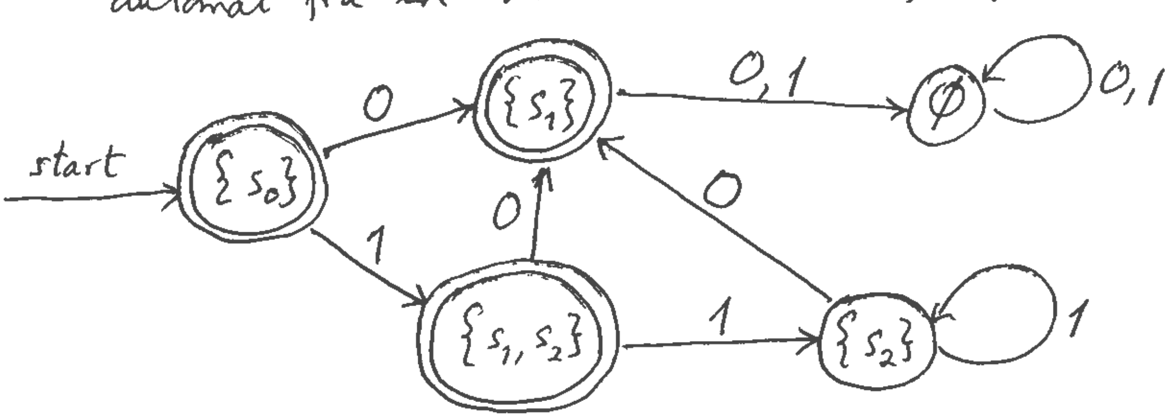
a)



b)

$$\lambda \cup 0 \cup 1 \cup 11^*0$$

c) Følger vi beskrivelsen som er gitt i læreboka for hvordan man konstruerer en deterministisk endelig tilstandsautomat fra en ikke-deterministisk, så får man:



Oppgave 7

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				X
Deloppgave 2		X		
Deloppgave 3		X		
Deloppgave 4	X			
Deloppgave 5		X		X
Deloppgave 6				X
Deloppgave 7	X		X	
Deloppgave 8			X	