Eksamen i TMA4140: Diskret Matematikk

15 desember 2016

Løsningsforslag

Oppgave 1 La $m = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$, $M_1 = \frac{m}{4} = 225$, $M_2 = \frac{m}{9} = 100$, $M_3 = \frac{m}{25} = 36$.

Vi finner multiplikative inverser y_1, y_2, y_3:

$M_1 y_1 \equiv 1 \pmod 4$, $M_2 y_2 \equiv 1 \pmod 9$, $M_3 y_3 \equiv 1 \pmod{25}$.

Vi finner $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -9$. Da er generell løsning:

$$x = 3 \cdot M_1 \cdot y_1 + 7 \cdot M_2 \cdot y_2 + 4 \cdot M_3 \cdot y_3 + m\mathbb{Z}$$

$$= 79 + 900\mathbb{Z}.$$ Den søkte løsningen er:

$$x = 79 - 900 = \underline{-821}$$

Oppgave 2 La $P(n)$ være påstanden: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

Vi ser at $P(1)$ er sann. Anta $P(n)$ er sann.

$P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$. Siden vi antar $P(n)$ er sann (induksjonsantagelsen), så får vi:

$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Nok å vise at $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

Multiplisér på begge sider med $\sqrt{n+1}$. Det gir:

$\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n+1$, hvilket er sant. Altså er $P(n+1)$ sann, q.e.d.

Oppgave 3 a) $** | * | \quad | *** | ** | ** | \quad | **$

De syv stolpene (eller rettere sagt, mellomrommene til disse) angir de 8 sjokoladetypene, mens de 12 *'ene angir utplukket av sjokolader. Antall slike utplukk er det samme som antall utplukk av 12 posisjoner av ialt $12+(8-1)=19$ posisjoner, altså $\underline{C(19,12)=\binom{19}{12}=50388}$.

b) Hver akseptabel vei er kodet med en sekvens av 4 H'er (H for høyre) og 4 V'er (V for vertikalt). Ialt finnes det altså $\underline{C(8,4)=\binom{8}{4}=70}$ forskjellige slike veier.

Oppgave 4 Vi har at for et tre så gjelder $|E|=|V|-1$, og altså $|E|=n-1$. Ifølge "håndhilsningsteoremet" så gjelder: $\sum_{v\in V} grad(v) = 2|E| = 2n-2$. Nå er $grad(v)\geq 1$ for alle $v\in V$. Anta ad absurdum at det finnes høyst to noder av grad 1. Vi får da:

$\sum_{v\in V} grad(v) \geq grad(v_1) + 2 + \sum_{v\in V'\subset V} grad(v)$, der $|V'|=n-3$, og $grad(v)\geq 2$ for alle $v\in V'$. Vi får altså:

$\sum_{v\in V} grad(v) \geq 3 + 2 + 2(n-3) = 2n-1$, som er en motsigelse til $\sum_{v\in V} grad(v) = 2n-2$, q.e.d.

(Alternativt kunne man argumentert med at $G=(V,E)$ er et rotfestet tre med rot v_1. G har tre deltrær som hver har minst to noder av grad 1.)

Oppgave 5 Grafen er todelt, og den er isomorf med den komplette todelte grafen $K_{4,4}$. Vi ser dette ved å farvelegge nodene $\{a, c, e, g\}$ røde og nodene $\{b, d, f, h\}$ blå. Da vil hver rød node forbindes med alle de blå nodene, og vice versa.

Oppgave 6 a) Det i'te diagonalleddet a_{ii} til A^7 angir antallet forskjellige veier av lengde 7 fra noden v_i tilbake til seg selv. (Altså, antallet forskjellige kretser av lengde 7 som går gjennom v_i.) I en todelt graf består hver krets av et partall antall kanter, og altså finnes det ingen krets av lengde 7.

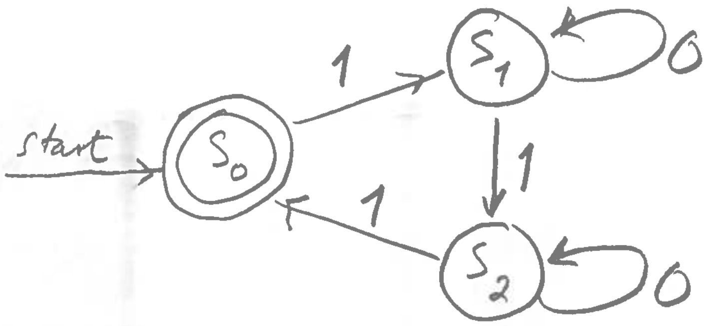
b) $K_{6,8}$ har en Eulerkrets (og følgelig en Eulervei) siden nodene i $K_{6,8}$ har partalls grader (henholdsvis 6 og 8).
$K_{6,8}$ har ingen Hamiltonvei (og følgelig ingen Hamiltonkrets) siden 8 noder ikke kan forbindes med 6 andre noder slik at man besøker hver node kun en gang, gitt føringen om at det er ingen kant mellom de 8 nodene (henholdsvis de 6 nodene).

Oppgave 7 $(0 \cup 1)^* 111$

$L(M)$ består av alle binære strenger som ender med tre 1'ere.

Oppgave 8

En endelig (ikke-deterministisk) tilstandsautomat M slik at $L(M)$ er representert ved det regulære uttrykket $(10^*10^*1)^*$ er:



Ved å bruke teoremet som beskriver hvordan man kan konstruere en regulær grammatikk $G = (V, T, S, P)$ slik at $L(G) = L(M)$, så får vi: $V = \{S, A, B, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$

$S \leftrightarrow s_0$, $A \leftrightarrow s_1$, $B \leftrightarrow s_2$

P: $S \to \lambda$, $S \to 1A$, $A \to 0A$, $A \to 1B$,
$B \to 0B$, $B \to 1S$, $B \to 1$

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Ett riktig satt kryss gir 1 poeng. Du trekkes ikke for å sette et galt kryss, men setter du flere enn 10 kryss vil du trekkes 3 poeng per kryss mer enn 10. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1		X		
Deloppgave 2		X		
Deloppgave 3				X
Deloppgave 4				X
Deloppgave 5	X			X
Deloppgave 6			X	
Deloppgave 7		X		
Deloppgave 8		X	X	