NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4140 Diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau

Tlf: 73 59 17 55

Eksamensdato: 15. desember 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Annen informasjon:
Eksamenssettet består av to deler. Oppgave 1 til 8, med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye), utgjør den ene delen. Oppgave 9, som er en flervalgsoppgave, utgjør den andre delen. Oppgave 9 teller 50%, og oppgavene 1 til 8 teller 50%. Siste side av eksamenssettet er et ark med en svarkupong der dine svar på oppgave 9 skal krysses av. Denne siste siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de åtte første oppgavene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☐	**farger** ☒
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Du skal løse denne oppgaven ved å bruke det kinesiske restteoremet, og du skal gi en kortfattet forklaring på din fremgangsmåte. Finn løsningen x, der $-900 < x < 0$, til kongruensligningene

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{4}, \\ x &\equiv 7 \pmod{9}, \\ x &\equiv 4 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Oppgave 2 Bevis ved induksjon ulikheten

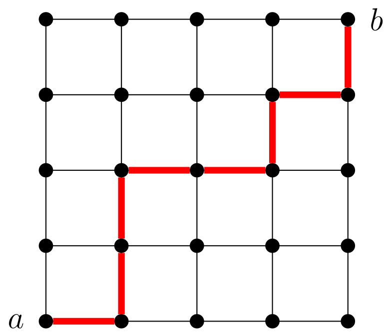
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

for alle $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Oppgave 3

a) På hyllen i supermarkedet finnes det 8 forskjellige sjokoladetyper. Lisa skal kjøpe 12 sjokolader. Hvor mange valg har hun? Forklar din fremgangsmåte.

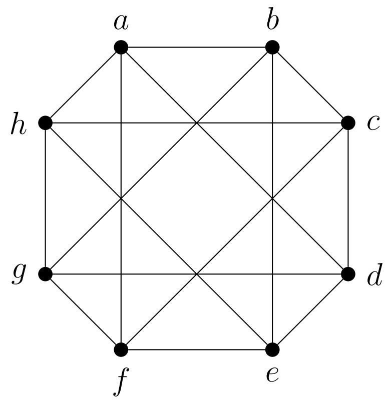
b) Hvor mange forskjellige veier er det som fører fra noden a til noden b i den urettede grafen med 25 noder vist i Figur 1 under, dersom man er bundet til å traversere hver kant kun mot høyre eller vertikalt oppover? (En slik vei er markert i Figur 1.) Forklar hvordan du resonnerer.



Figur 1: Et eksempel på en lovlig vei fra a til b.

Oppgave 4 La $G = (V, E)$ være et tre med n noder. Anta at det finnes en node $v_1 \in V$ med $\text{grad}(v_1) = 3$. Vis at G må ha minst tre noder av grad 1.

Oppgave 5 Gi en begrunnelse for om den urettede enkle grafen i Figur 2 er todelt eller ikke. Dersom den er todelt, angi hva slags todelt graf den er isomorf med.



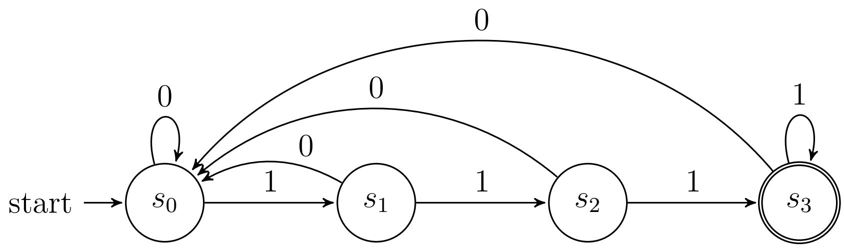
Figur 2: Grafen i Oppgave 5.

Oppgave 6 La $A = A_{K_{6,8}}$ være nabomatrisen («adjacency matrix») til den komplette todelte grafen $K_{6,8}$.

a) Forklar hvorfor $a_{ii} = 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots, 14$, der a_{ii} er det i'te elementet på diagonalen i $A^7 = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{7} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{14}$.

b) Gi en begrunnelse for om $K_{6,8}$ har en Eulervei eller Eulerkrets, og om $K_{6,8}$ har en Hamiltonvei eller Hamiltonkrets.

Oppgave 7 Finn et regulært uttrykk for $L(M)$, der M er den deterministiske endelige tilstandsautomaten i Figur 3. Beskriv med få ord hva språket $L(M)$ er.



Figur 3: Tilstandsautomaten M.

Oppgave 8 Finn en regulær grammatikk $G = (V, T, S, P)$, der G har tre ikke-terminaler (dvs. $V - T = \{S, A, B\}$), slik at språket $L(G)$ generert av G er representert ved det regulære uttrykket $(10^*10^*1)^*$.

Oppgave 9

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave bestående av 8 deloppgaver, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siste siden skal markeres med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første åtte oppgavene. Det vil være minst ett riktig svar-alternativ for hver deloppgave, men det kan være flere. Det er totalt 10 riktige svar i denne oppgaven og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Riktig satte kryss gir 1 poeng. Krysser du av galt trekkes du ikke for det, men setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng per kryss mer enn 10.

Deloppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er sanne?

Alt 1) Postfiksuttrykket $1\ 2 + 3 \uparrow 9 - 3\ 2 * /$ har verdien 4.

Alt 2) Prefiksuttrykket $/ - \uparrow */ - 7\ 3\ 2\ 3\ 2\ 8\ 7$ har verdien 4.

Alt 3) $(p \vee (s \wedge r)) \longleftrightarrow ((p \wedge s) \vee (p \wedge r))$ er en tautologi.

Alt 4) $((p \wedge s) \to r) \longleftrightarrow ((p \to r) \wedge (s \to r))$ er en tautologi.

Deloppgave 2 Hvilke av følgende påstander er sanne?

Alt 1) Funksjonen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definert ved $f(n) = 2n^2 + n$ er surjektiv.

Alt 2) Funksjonen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ definert ved

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{når } n > 0 \\ 1 - 2n & \text{når } n \leq 0 \end{cases}$$

er bijektiv.

Alt 3) Funksjonen $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definert ved $f(n, m) = 89n + 246m$ er ikke surjektiv.

Alt 4) Funksjonen $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definert ved $f(k, m, n) = 21k + 351m + 267n$ er surjektiv.

Deloppgave 3 La $G = (V, T, S, P)$ være den regulære grammatikken definert ved at $V = \{S, A, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$ og P er gitt ved:

$$S \to 1S, \quad S \to 0A, \quad A \to 1A, \quad A \to 1.$$

Hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $L(G) = 1^*01^*$

Alt 2) $L(G) = 11^*011^*$

Alt 3) $L(G) = 11^*01^*$

Alt 4) $L(G) = 1^*011^*$

Deloppgave 4 Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) $(2159)_{10} = (53D)_{16} + (232)_{16}$

Alt 2) Det finnes en $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ slik at $n^2 + 1$ er et kvadrattall.

Alt 3) $\exists\ s, t \in \mathbb{Z}$ slik at $630s + 196t = 54$.

Alt 4) $1111^{2301} \equiv 1111 \pmod{461}$

Deloppgave 5 La $G = (V, T, S, P)$ være den ikke-regulære grammatikken definert ved at $V = \{S, A, B, C, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$ og P er gitt ved:

$$\begin{aligned} &S \to C, \quad A \to 0B, \quad C \to 1C, \quad B \to 1B, \\ &C \to 0A, \quad B \to 0A, \quad A \to 1A, \quad B \to \lambda. \end{aligned}$$

Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) $L(G) = 1^*01^*0(1 \cup 01^*0)^*$

Alt 2) $L(G) = 1^*0(1^*01^*01^*)^*$

Alt 3) $L(G) = 1^*01^*0(1^*01^*01^*)^*$

Alt 4) Det eksisterer en regulær grammatikk $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{T}, \overline{S}, \overline{P})$ slik at $L(\overline{G}) = L(G)$.

Deloppgave 6 Gitt rekurrensrelasjonen $a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2}$; $n \geq 2$, der $a_0 = 1$ og $a_1 = 4$. Hva er a_8?

Alt 1) -778946

Alt 2) 22486

Alt 3) -111278

Alt 4) -22486

Deloppgave 7 La universalmengden være de hele tallene $\mathbb{Z}$. Hvilke av følgende er garantert sant?

Alt 1) $\exists m\ \forall n\ (n^{96} - m - 1 \equiv 0 \pmod{97})$

Alt 2) $\forall m\ (19 \mid (m^{23} - m^5))$, der $a \mid b$ betyr at a er en divisor i b.

Alt 3) $\forall m\ \forall n\ \exists k\ ((m < k < n) \vee (n \leq k \leq m))$

Alt 4) $\forall m\ (23 \mid (m^{22} - 1))$

Deloppgave 8 La R være relasjonen på mengden $\mathbb{Z}$ definert ved at $(a, b) \in R$ dersom $7 \mid (a + 6b)$. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) R er ikke refleksiv.

Alt 2) R er symmetrisk.

Alt 3) R er transitiv.

Alt 4) R er antisymmetrisk.

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Ett riktig satt kryss gir 1 poeng. Du trekkes ikke for å sette et galt kryss, men setter du flere enn 10 kryss vil du trekkes 3 poeng per kryss mer enn 10. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				