Kontinuasjonseksamen i TMA4140 august 2017

Løsningsforslag

Oppgave 1 La $P(n)$ være utsagnet

$$n^2 - 7n + 12 > 0.$$

Man sjekker at $P(5)$ er sann. Anta at $P(n)$ er sann, dvs. at $n^2 - 7n + 12 > 0$. Ønsker å vise at $P(n+1)$ er sann, dvs. at $(n+1)^2 - 7(n+1) + 12 > 0$. Vi får:

$$(n+1)^2 - 7(n+1) + 12 = \underbrace{(n^2 - 7n + 12)}_{>0} + \underbrace{(2n + 1 - 7)}_{>0} > 0$$

Altså er $P(n+1)$ sann, og dermed er påstanden vist for alle $n \geq 5$ ved induksjon.

Oppgave 2 $49 \equiv -1 \pmod{50}$. Altså får vi:

$$x \equiv 49^{49} \equiv (-1)^{49} = -1 \equiv 49 \pmod{50}.$$

Altså er $\underline{x = 49}$

Oppgave 3 Vi skal først vise at $g \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er injektiv. Det er nok å vise at $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er injektiv, siden det vil medføre at $g \circ g$ er injektiv.

Anta ad absurdum at $g(x) = g(y)$ og at $x < y$. Da er $\frac{x}{2} < \frac{y}{2}$ og $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Vi får:

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{x}{2} = \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor + \frac{y}{2}$$

, og altså

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor .$$

Siden venstresiden er negativ og høyresiden er ≥ 0, så får vi en motsigelse. Altså er g, og dermed $g \circ g$, injektiv.

For å vise at $g \circ g$ ikke er surjektiv, så er det nok å vise at g ikke er surjektiv. Vi viste ovenfor at $g(x) < g(y)$ når $x < y$. Altså er g strikt monotont voksende. Siden $g(0) = 0$ og $g(2) = 2$, mens $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1$, så er ikke g surjektiv.

Altså er $g \circ g$ ikke surjektiv.

Oppgave 4 a) La hyllene representeres ved $k-1$ stolper og bøkene ved n stjerner.

$$* * \mid \quad \mid * * * * \mid \cdots\cdots \mid * * * \mid *$$

Svaret blir da $C(n+k-1, n) = \binom{n+k-1}{n}$.

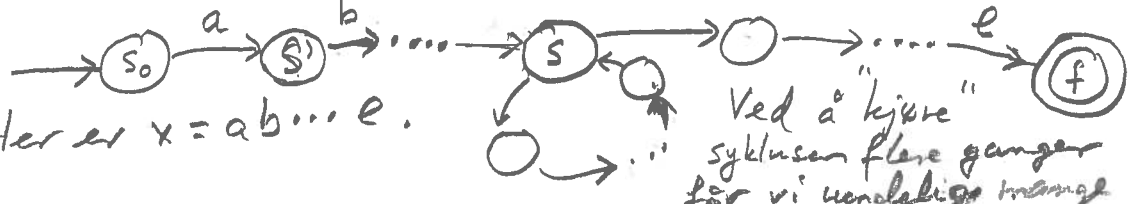
b) Problemet kan oversettes til følgende problem: Hvor mange permutasjoner av $n+k-1$ symboler finnes det dersom $k-1$ av disse symbolene er ikke-distinkte?

Svaret er : $\dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$

Oppgave 5 a)

$$10^* \cup (10^*1 \cup 01)(0 \cup (0 \cup 1)1)^*$$

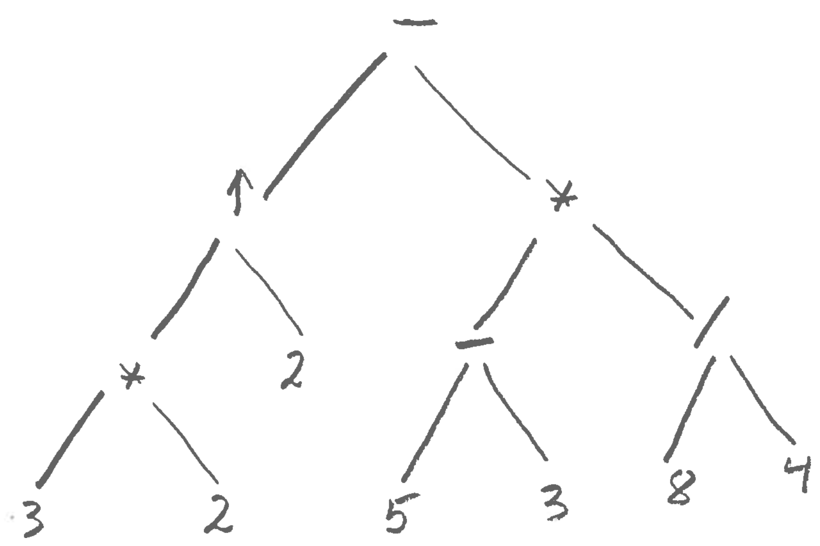
b) Dersom $L(M)$ består av uendelig mange strenger, så må det finnes en streng av lengde større enn $|S|$, siden $|I| < \infty$.
Anta at det finnes en streng x over I av lengde $\geq n$, der $n = |S|$. Ved skuffeprinsippet vil x gjennomløpe samme tilstand (kall denne s) minst to ganger. Vi får følgende situasjon:



Her er $x = ab\cdots e$.

Ved å "kjøre" syklusen flere ganger får vi uendelige mange strenger i $L(M)$.

Oppgave 6



Oppgave 7

Grafene er ikke isomorfe siden noden v_6 har grad 4 i høyre graf, mens alle nodene i venstre graf ikke har grad 4.

Oppgave 8

Alt 4 er sann, de andre alternativene er gale.